

早稲田大学理工学部 正員 堀井 健一郎
早稲田大学 大学院 学生員 工修 ○川原 睦人

1. 緒言

骨組構造の全体座屈の解析法に関しては、すでに種々の方法が考えられており、それぞれ特徴がみられる。ここでは、構造が同一平面内のみ存在し、かつ面内座屈と面外座屈とを分離して取扱いうる場合を想定して解析を行った。すなわち骨組構造を構成する各部材は同一平面内にあり、これらの面内への変形と面外への変形とが、たがいに独立であるとみなしうるような場合における面外座屈の解析法について検討したものである。

座屈荷重を求める問題は、周知の通り構造の stiffness matrix の determinant と 0 にするような最小荷重を求めることに帰着するが、ここでは実際の数値計算を行う際の便宜を考慮して、解式を線形化しておき、固有値を求めるように変形した。

2. 座屈変形条件式の誘導

直線部材のみよりなる平面構造物では、薄肉円断面部材も含めて、せん断中心軸が構造面内にある場合には、面内の変形と面外の変形とを分離して考えることができる。

このとき部材のひずみエネルギーは、部材軸方向に z 座標をとれば、(1)式のように示される。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI (\psi')^2 + EC_w (\varphi')^2 + GJ (\varphi')^2 + EA (u')^2 \right\} dz + \frac{N}{2} \int_0^L \left\{ -(\psi')^2 - (\varphi')^2 r_0^2 + u' \right\} dz \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに u : 軸方向変位, ψ : 面外への変位, φ : わり角

EI : 曲げ剛性係数, EC_w : 曲げわり剛性係数, GJ : わり剛性係数, EA : のび剛性係数

N : 部材軸力, r_0 : 断面二次半径

せん断中心の変位と、材端の変位を用いて次のように仮定する。通常の場合、骨組構造の材端にはかなり剛なダイヤフラム等が存在していることを考慮して、材端におけるそれはないものとした。

$$\psi = \psi_0 + x_0 \varphi$$

$$= (1-3\xi^2+2\xi^3)\psi_a + (3\xi^2-2\xi^3)\psi_b - (\xi-2\xi^2+\xi^3)l\theta_a - (-\xi^2+\xi^3)l\theta_b + x_0(1-3\xi^2+2\xi^3)\varphi_a + x_0(3\xi^2-2\xi^3)\varphi_b \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\varphi = (1-3\xi^2+2\xi^3)\varphi_a + (3\xi^2-2\xi^3)\varphi_b \quad \text{ここに } \xi = \frac{z}{l} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(2)式、(3)式を(1)式に代入し、それぞれ

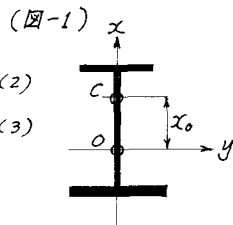
$$\frac{\partial U}{\partial \psi_a} = Q_a, \quad \frac{\partial U}{\partial \psi_b} = Q_b, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a} = M_a, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b} = M_b, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_a} = T_a, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_b} = T_b$$

なる関係を用いれば、変形条件式として(4)式が導かれる。式中 $T, M, Q, \varphi, \theta, \psi$ はそれぞれ次のものとあらわしている。

$T_a (T_b)$: a 端 (b 端) のわりモーメント, $\varphi_a (\varphi_b)$: a 端 (b 端) のわり角

$M_a (M_b)$: " " 曲げモーメント, $\theta_a (\theta_b)$: " " たわみ角

$Q_a (Q_b)$: " " せん断力, $\psi_a (\psi_b)$: " " 変位



$$\begin{pmatrix} T_a \\ M_a \\ Q_a \\ T_b \\ M_b \\ Q_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_a - A_b & A_c & -A_a - A_b - A_c \\ -A_b & A_a - A_e & A_b & A_d & A_e \\ A_c - A_e & A_f & -A_c & -A_e & -A_f \\ -A_a & A_b & -A_c & A_a & A_b & A_c \\ -A_b & A_d & -A_e & A_b & A_d & A_e \\ -A_c & A_c & -A_f & A_c & A_e & A_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_a - B_b & B_c & -B_a - B_b - B_c \\ -B_b & B_d - B_e & B_b & B_d & B_e \\ B_c - B_e & B_f & -B_c - B_e - B_f \\ -B_a & B_b & -B_c & B_a & B_b & B_c \\ -B_b & B_d & -B_e & B_b & B_d & B_e \\ -B_c & B_e & -B_f & B_c & B_e & B_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \theta_a \\ u_a \\ \varphi_b \\ \theta_b \\ u_b \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{12EC_w}{l^3} + \frac{6GJ}{5l} + \frac{12EI_x}{l^3} x_o^2 & B_a &= \frac{6N}{5l} x_o^2 + \frac{6N}{5l} r_o^2 \\ A_b &= \frac{6EI_x}{l^2} x_o, \quad A_c = \frac{12EI_x}{l^3} x_o & B_b &= \frac{N}{10} x_o, \quad B_c = \frac{N}{5l} x_o \\ A_d &= \frac{4EI}{l}, \quad A_d' = \frac{2EI}{l} & B_d &= \frac{2Nl}{15}, \quad B_d' = -\frac{Nl}{30} \\ A_e &= \frac{6EI_x}{l^2}, \quad A_f = \frac{12EI}{l^3} & B_e &= \frac{N}{10}, \quad B_f = \frac{6N}{5l} \end{aligned}$$

圧縮力: $-N$, 引張力: N

(4)式は $\frac{GJ - Nr_o^2}{EC_w} \ll 1$ の仮定のもとに線形化したものと一致しており、 EC_w がきわめて小さい部材については

$$A_a = \frac{GJ}{l} + \frac{12EI}{l^3} x_o^2, \quad B_a = \frac{6N}{5l} x_o^2 + \frac{N}{l} r_o^2$$

のように変更する必要がある。

3. 解式および座屈荷重の計算

(4)式を簡単に次のようにあらわしておく。

$$\{F\} = ([K_a] + [K_b]) \cdot \{U\} \dots\dots\dots (5)$$

これを骨組構造全体の座標系へ変換すれば(6)式がえられる。

$$\{X\} = ([C] \cdot [K_a] \cdot [C]^T + [C] \cdot [K_b] \cdot [C]^T) \cdot \{X\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{こゝに } [C] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

これに、構造の節点における力のつりあい条件および節点での変位の連続の条件を用いることにより、節点変位と未知量とした解式がえられる。すなわち

$$([K_a] + [K_b]) \cdot \{X\} = \{P\} \dots\dots\dots (7)$$

こゝに $[K_b]$ は軸力 N を含んでいるが、外力荷重の載荷状態が一定であるならば各部材の軸力の比も一定であると考えることができるので、そのような場合には近似的に軸力は荷重強度の増加に比例するとみなすことができる。また $[K_b]$ の各要素は軸力の1次関数であるから、基準の載荷状態に対する $[K_b]$ を計算しておく

$$|[K_a] + \lambda [K_b]| = 0 \dots\dots\dots (8)$$

を満足する最小の λ を求めれば、座屈荷重と計算することができる。

実際の計算にあたっては

$$[K_a] \cdot \{X\} = -\lambda [K_b] \cdot \{X\} \dots\dots\dots (9)$$

のような形の固有値の計算を行えばよいわけである。

$$\left(-\frac{1}{\lambda}\right)[E]\{x'\} = [K_a]^{-\frac{1}{2}}[K_b][K_a]^{-\frac{1}{2}}\{x'\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\therefore \{x'\} = [K_a]^{-\frac{1}{2}}\{x\}$$

として計算すれば、対称行列の固有値を2回計算することになり、Jacobiの回転法を用いて確実に解が求められる。

これに対して(9)式を

$$(-\lambda) = \frac{\{x\}^T[K_a]\{x\}}{\{x\}^T[K_b]\{x\}} \quad \dots\dots\dots(11)$$

のように Rayleigh 商に変形して、power method あるいは conjugate gradient method 等を用いれば、stiffness matrix の0でない要素のみを用いて計算することができるように、不要の固有値(最小固有値以外のもの)を適宜無視することができるなどかなり有利である。

4. 感度係数の計算と power method の改良

構造物の最適設計と実現するためには、その剛性の変化がどの程度座屈強度に影響するかを知ることも必要になってくる。そこで power method に多少の改良を加えることにより、構造物の剛性の変化による座屈強度の変化を求める方法を検討してみた。いま、式を変形して

$$\lambda[E]\{x\} = [A]\{x\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

のようにならわせば、構造の剛性を変化させることにより、右辺の $[A]$ は $[A+\Delta A]$ となる。

任意ベクトル $\{y_0\}$ は、 $[A+\Delta A]$ の固有ベクトルを用いることによって

$$\{y_0\} = C_1\{x_1+\Delta x_1\} + C_2\{x_2+\Delta x_2\} + \dots\dots\dots + C_n\{x_n+\Delta x_n\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

のようにならわされるから、これに $[A+\Delta A]^R$ を乗じて変形すると

$$\frac{Z^{R+1}}{Z^R} = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1) \cdot \frac{1 + \left(\frac{\rho_2}{\beta_1}\right)\left(\frac{\lambda_2 + \Delta\lambda_2}{\lambda_1 + \Delta\lambda_1}\right)^{R+1} + \dots\dots\dots + \left(\frac{\rho_n}{\beta_1}\right)\left(\frac{\lambda_n + \Delta\lambda_n}{\lambda_1 + \Delta\lambda_1}\right)^{R+1}}{1 + \left(\frac{\rho_2}{\beta_1}\right)\left(\frac{\lambda_2 + \Delta\lambda_2}{\lambda_1 + \Delta\lambda_1}\right)^R + \dots\dots\dots + \left(\frac{\rho_n}{\beta_1}\right)\left(\frac{\lambda_n + \Delta\lambda_n}{\lambda_1 + \Delta\lambda_1}\right)^R} \approx \lambda_1 + \Delta\lambda_1$$

$$\therefore \{Z^R\} = [A+\Delta A]^R\{y_0\} \quad \dots\dots\dots(15)$$

いま、剛性の変化を ΔI で与えたとき、 $[\Delta A] = \Delta I \cdot [A']$ のようにならわされるとすれば

$$[B^{(1)}] = [A'] \quad , \quad [B^{(R)}] = [A] \cdot [B^{(R-1)}] + [A'] \cdot [A]^{R-1}$$

において $[B^{(R)}]$ を計算すると、(15) 式は ΔI の2次以上の項を省略して

$$\{Z^R\} = [A+\Delta A]^R\{y_0\} \approx [A]^R\{y_0\} + \Delta I[B^{(R)}]\{y_0\} \equiv \{y_R\} + \Delta I\{y_R'\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

のようになすことができる。これと(14)式とを用いることによって、感度係数は

$$\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta I} \doteq \frac{y_R'}{y_{R-1}} + \frac{y_{R+1}'}{y_R} \quad \dots\dots\dots(17)$$

によって計算することができる。

5. 計算例

計算例としてポニートラスの面外座屈に関する計算結果を示す。対象とした構造は、単純支持された平行弦ワーレントラス(垂直桁を有しない)を主桁にもつ、比較的中員の広い道路橋である。

計算結果により、わじり座屈に対して軸力の影響はさほどに曲げわじり剛性の影響の度合と比較したもの(表-1)である。表は、軸力の影響はさほどに曲げわじり剛性を考慮した場合のみに対する

他の場合の入の変化を比率で示してある。

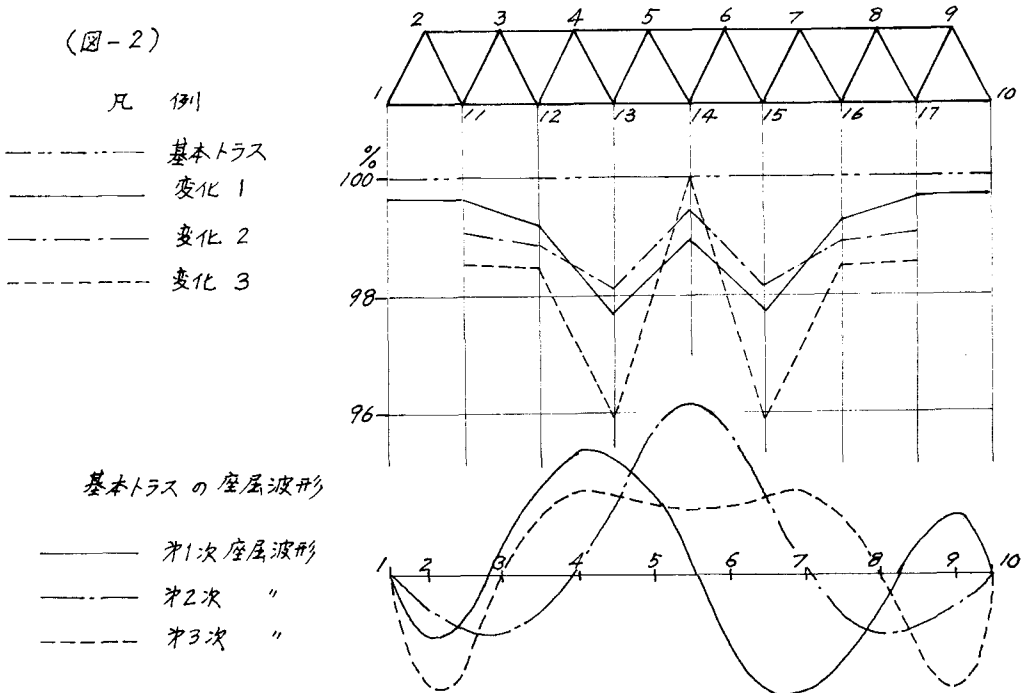
この結果をみると、通常の部材断面を有するトラスでは、これらの影響は問題とするに足らぬようである。

次に、構造物の各部の剛性の変化が入におよぼす影響をしらべた結果を(図-2)に示す。基本の諸元に対して、変化1は端柱および上弦材のI, J のみを格間ごとに順次10%だけ減少させた場合、変化2は斜材のI, J のみを格間ごとに順次10%だけ減少させた場合、変化3は床桁の剛性のみを格点ごとに50%減少させた場合の入の変化を示したものである。斜材の変化は、下弦格長に集る2部材を一对にして変化させている。またこれらの変化はいずれもスパン中央点に対して対称に手えている。たとえば上弦材では2~3部材と8~9部材とは同時に変化し、床桁では格長12に取付くものと格長16に取付くものとは同時に変化するという具合である。入の変化は基本諸元を有するものを基準として、それに対する比率で示した。図は変化を手之に部材位置(上弦材に対応する下弦格長、端柱はそれが取付く交点、斜材および床桁はそれが取付く下弦格長で示してある)に、1の場合の入の比率をプロットしてある。この図によって各部の変化が座屈安全率におよぼす効果を比較することができる。

(表-1)

ねじり座屈に対して	入の比 %
軸力の影響および曲げねじり剛性を考慮した場合	100.00
曲げねじり剛性を無視した場合	97.06
さらに軸力の影響も無視した場合	97.10

(図-2)



参考文献

- 1) A. H. Chilver: Thin-walled Structures — J. D. Renton: Buckling of Frames composed of Thin-walled members.
- 2) J. J. Conner, R. D. Logher, S. C. Chan: Non-linear Analysis of Elastic Frame Structures. Proc. ASCE Vol. 94, No. ST6
- 3) K. Klöppel, 他: Das räumliche Stabilitätsproblem beliebig gelagerter, gebrochener Stabzüge mit doppelt- oder einfachsymmetrischen, offenem dünnwandigen Querschnitt unter feldweise konstanter Momenten- und Normalkraft beanspruchung. Stahlbau, Heft 10, 1963