

関西大学工学部 正会員 米沢 博

〃 〃 〇三上 市蔵

〃 〃 武田 八郎

〃 〃 赤松 洋一

1. まえがき さきに極異方性扇形板の曲げ座屈について, Frobeniusの方法を用いて厳密解を誘導した¹⁾。ここでは Galerkin法を用いて近似解を誘導した。厳密解によると係数行列式の値を0にするような座屈荷重を走査法によって数値計算しなければならないが, この近似解によれば適当な項数を考え, 行列の固有値を求めればよく, 電子計算機のプログラミングの上からも, 計算時間の上からもかなり有利になる。扇形板の境界条件としては厳密解の場合と同様に, 直線辺が単純支持され, 曲線辺が種々の支持条件をもつ場合を考えた。これらの解析結果は, ソリッド・リブ・アーチの鉛直補剛材を有する腹板あるいは箱型断面ラーメンの隅角部の腹板の曲げ座屈に適用できるとであろう。

2. 極異方性扇形板の微分方程式の解 図-1に示すような純曲げを受ける極異方性扇形板が座屈したときのたわみ曲面の微分方程式はつきようになる。²⁾

$$\begin{aligned} D_r \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} \right) + 2H \left(\frac{\partial^4 w}{r^2 \partial^2 \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \right) \\ + D_\theta \left(- \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3 \partial r} + 2 \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \right) \\ = \pm N_0 \left(1 - 2 \frac{r-r_i}{r_0-r_i} \right) \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

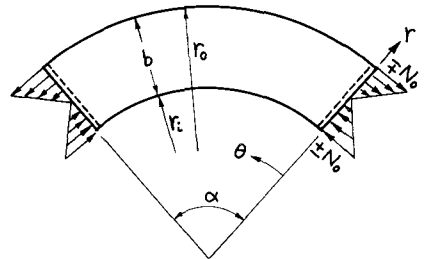


図-1

ここに, $H = \kappa \sqrt{D_r D_\theta}$, $D_r \cdot D_\theta$ は半径方向および接線方向の曲げ剛さで, 右辺の複号は $r = r_i$ で引張のとき+, $r = r_0$ で引張のとき-をとる。

式(1)の解を

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} R(r) \sin(m\pi\theta/\alpha), \quad r = r_0 \eta \quad (2)$$

と仮定し, 式(1)に代入するとつぎようになる。

$$G[R] \equiv \eta^4 \frac{d^4 R}{d\eta^4} + 2\eta^3 \frac{d^3 R}{d\eta^3} - \eta^2 \frac{d^2 R}{d\eta^2} + \left[\eta \mp \frac{\mu}{\psi} (\eta^3 - \beta \eta^4) \right] \frac{dR}{d\eta} + \left[-\delta \pm \mu (\eta^2 - \beta \eta^3) \right] R = 0 \quad (3)$$

ただし, $\rho = r_i/r_0$, $\delta = 2\kappa\psi\sqrt{D_\theta/D_r} + D_\theta/D_r$, $\delta = \delta - (D_\theta/D_r)(1-\psi)^2$, $\psi = (m\pi/\alpha)^2$, $\mu = (N_0 r_0^2/D_r)\psi(1+\rho)/(1-\rho)$, $\beta = 2/(1+\rho)$ である。

式(3)の解を求めるために Galerkin法を用いる。まず基底関数を R_n とし, つぎのように仮定する。

$$R = \sum_{n=0}^N \delta_n R_n = \sum_{n=0}^N \delta_n \{ A_n \eta^n + B_n \eta^{n+1} + C_n \eta^{n+2} + D_n \eta^{n+3} + \eta^{n+4} \} \quad (4)$$

ここに, A_n, B_n, C_n, D_n は定数で, 式(4)が境界条件を満足するように定める。たとえば両曲線辺が

1) 米沢・三上・赤松: 扇形板の曲げ座屈, 土木学会関西支部年次学術講演会概要集, BB44.5, p.1-10

2) Yonezawa: Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol.88, No. EM1, 1962, pp.1-21.

固定されている場合は、式(2)，(4)を $[w]_{\xi=p,1}=0$ ， $(\partial w/\partial \xi)_{\xi=p,1}=0$ に代入して

$$\begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & p^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n & (n+1)p & (n+2)p^2 & (n+3)p^3 \\ n & n+1 & n+2 & n+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p^4 \\ -1 \\ -(n+4)p^4 \\ -(n+4) \end{bmatrix} \quad (5)$$

より A_n, B_n, C_n, D_n が決定される。

式(4)の係数 g_k はつぎの式から求まる。

$$\int_p^1 G(R) \frac{\partial R}{\partial g_k} d\xi = \int_p^1 G(R) R_k d\xi = 0 \quad (6)$$

式(4)を式(6)に代入し、積分を実行するとつぎのようになる。

$$(M_{k0} \pm \mu L_{k0}) g_0 + (M_{k1} \pm \mu L_{k1}) g_1 + \dots + (M_{kn} \pm \mu L_{kn}) g_n = 0 \quad (7)$$

ただし $M_{kn} = N_n A_n (P_1 A_k + P_2 B_k + P_3 C_k + P_4 D_k + P_5) + N_{n+1} B_n (P_2 A_k + P_3 B_k + P_4 C_k + P_5 D_k + P_6) + N_{n+2} C_n (P_3 A_k + P_4 B_k + P_5 C_k + P_6 D_k + P_7) + N_{n+3} D_n (P_4 A_k + P_5 B_k + P_6 C_k + P_7 D_k + P_8) + N_{n+4} (P_5 A_k + P_6 B_k + P_7 C_k + P_8 D_k + P_9)$,

$$\begin{aligned} L_{kn} = & \Lambda_n A_n [(P_3 - \beta P_4) A_k + (P_4 - \beta P_5) B_k + (P_5 - \beta P_6) C_k + (P_6 - \beta P_7) D_k + (P_7 - \beta P_8)] \\ & + \Lambda_{n+1} B_n [(P_4 - \beta P_5) A_k + (P_5 - \beta P_6) B_k + (P_6 - \beta P_7) C_k + (P_7 - \beta P_8) D_k + (P_8 - \beta P_9)] \\ & + \Lambda_{n+2} C_n [(P_5 - \beta P_6) A_k + (P_6 - \beta P_7) B_k + (P_7 - \beta P_8) C_k + (P_8 - \beta P_9) D_k + (P_9 - \beta P_{10})] \\ & + \Lambda_{n+3} D_n [(P_6 - \beta P_7) A_k + (P_7 - \beta P_8) B_k + (P_8 - \beta P_9) C_k + (P_9 - \beta P_{10}) D_k + (P_{10} - \beta P_{11})] \\ & + \Lambda_{n+4} [(P_7 - \beta P_8) A_k + (P_8 - \beta P_9) B_k + (P_9 - \beta P_{10}) C_k + (P_{10} - \beta P_{11}) D_k + (P_{11} - \beta P_{12})] \end{aligned}$$

$$N_{n+i} = (n+i)(n+i-2)[(n+i-1)^2 - \delta] - \delta$$

$$\Lambda_{n+i} = 1 - (n+i)/\psi$$

$$P_i = (1 - p^{n+k+i}) / (n+k+i)$$

したがって $k=0, 1, \dots, n$ に対して式(7)を求めるでつぎの $(n+1)$ 個の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_{00} \pm \mu L_{00} & M_{01} \pm \mu L_{01} & \dots & M_{0n} \pm \mu L_{0n} \\ M_{10} \pm \mu L_{10} & M_{11} \pm \mu L_{11} & \dots & M_{1n} \pm \mu L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n0} \pm \mu L_{n0} & M_{n1} \pm \mu L_{n1} & \dots & M_{nn} \pm \mu L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

すなわち

$$[M][g] = \mu [L][g] \quad (9)$$

n を適当に選べ、式(9)から正の最小固有値 μ を求めれば座屈荷重 N_0 が計算できる。 n の値を大きくとれば得られる解はより厳密解に近づく。

なお Galerkin法の原理によれば、基底関数 R_n は境界 $\xi=p, 1$ で0にならなければならない。曲線辺が固定か単純支持の場合には、境界条件 $[w]_{\xi=p,1}=0$ が自動的に上の必要条件を満たす。しかし自由あるいは弾性支持の場合にはその条件を満たさないことになるので、式(4)を用いて座屈荷重を求めると荒い近似となる。より良い近似値を求めるためには式(4)の基底関数に若干の修正を施さなければならない。