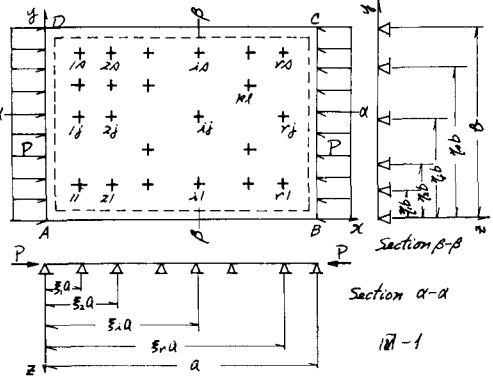


1. 緒言 無梁板構造(以下単に無梁板と称する)は垂直荷重に対して有利な構造であるが、水平荷重や座屈荷重に対しては一概に有利であるとはいえない。特に我国のように地震力が構造設計上の重要な条件となつてゐる場合には、板の厚さが大きくなって必ずしも程増加した要領を得た構造とはいえず、実際設計において検討を加へる必要がある。水平荷重を受ける無梁板の解法に関しては欄橋¹⁾、許²⁾らの研究があるが、これらはいずれも無限に伸びる無梁板において、柱が一定間隔に配列されかつ各柱とも一樣な柱頭モーメントを生ずるごく単純な状態に関するものであり、実際とは異なる。また、無梁板の座屈荷重に関して論じた報文は、FEMによる近似解法と降伏は未だ見当らない。着者は、水平荷重および座屈荷重の作用を受ける無梁板の解法について研究を行うものであるが、本論文はその第一報として、無梁板の一方向座屈について報告するものである。すなわち、板が周囲で単純支持されかつ中間に任意に配列された支束により束支持されるごく単純な無梁板において、板面内の一方向圧縮力が作用する場合の座屈荷重算定法およびその数値計算結果を提示せんとするのである。

2. 解法. (1) 板の弾性曲面 図-1に示すごとく、スパン a 、巾の矩形板において、直交座標系 (x, y, z) を導入する。また、板は周囲で単純支持され、かつ、中間に任意配列の支束で束支持されているものと、各支束に支束番号 $11, 12, \dots, 1j, 21, 22, \dots, 2i, \dots, kj, \dots, r1, r2, \dots, rj$ を付す。無梁板の一方向座屈は x 方向および y 方向の圧縮力を受ける2種があるが、本文では x 方向の圧縮力を受ける場合について取り扱うものとする。いま、板面内の x 方向に単位長さ当たり P なる圧縮力の作用を受けて無梁板が曲げ変形を起こすものとする。かかるとき、中間支束 $2j$ は反力を生ずるが、これら中間支束による荷重と併せて無梁板の座屈に関する基礎微分方程式は、板面内の圧縮力 P と垂直荷重 $g(x, y)$ が同時に作用する平面板の基礎微分方程式と同じ次式で与えられることとなる。



$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g(x, y) \quad \text{ここに: } D: \text{板剛度, } w: \text{板のたわみ} \quad (1)$$

式(1)の一般解は全周函数と特殊解との和で与えられるが、 w として次式を仮定する。

$$w = X(\xi) \sin N\pi\eta + Y(\eta) \sin M\pi\xi \quad \text{ここに: } \xi = x/a, \eta = y/b, \quad M, N = 1, 2, \dots \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入する。 $X(\xi)$, $Y(\eta)$ の一般解を求められそれら X のごとく与えられる。

$X(\xi):$ ① $\lambda > 2(N\pi/b)$ $X(\xi) = A_1 \sin \lambda \xi + B_1 \cos \lambda \xi + C_1 \sinh \lambda \xi + D_1 \cosh \lambda \xi$

② $\lambda = 2(N\pi/b)$ $X(\xi) = (A_2 + B_2 \xi) \sin \frac{N\pi}{b} \xi + (C_2 + D_2 \xi) \cos \frac{N\pi}{b} \xi$

③ $\lambda < 2(N\pi/b)$ $X(\xi) = A_3 e^{\lambda \xi} \sin \frac{\lambda}{2} \xi + B_3 e^{\lambda \xi} \cos \frac{\lambda}{2} \xi + C_3 e^{-\lambda \xi} \sin \frac{\lambda}{2} \xi + D_3 e^{-\lambda \xi} \cos \frac{\lambda}{2} \xi$

$Y(\eta):$ ① $\lambda > M\pi$ $Y(\eta) = A_4 \sin \lambda \eta + B_4 \cos \lambda \eta + C_4 \sinh \lambda \eta + D_4 \cosh \lambda \eta$

(3)

$$\textcircled{2} \lambda = M\pi \quad Y(\eta) = A_4 + B_4\eta + C_4 \sinh \sqrt{2} M\pi \eta + D_4 \cosh \sqrt{2} M\pi \eta$$

$$\textcircled{3} \lambda < M\pi \quad Y(\eta) = A_5 \sinh \kappa_4 \eta + B_5 \cosh \kappa_4 \eta + C_5 \sinh \kappa'_4 \eta + D_5 \cosh \kappa'_4 \eta$$

$$\text{こゝに: } \lambda^2 = \rho^2 \omega^2, \quad \mu = \theta/a, \quad \kappa_1 = \gamma/2 + \sqrt{\lambda^2 - 4(N\pi\mu)^2}, \quad \kappa_2 = \gamma/2 - \sqrt{\lambda^2 - 4(N\pi\mu)^2}, \quad \kappa = \sqrt{(N\pi\mu)^2 - \lambda^2/4}$$

$$\kappa_3 = \mu \sqrt{M\pi(\lambda - M\pi)}, \quad \kappa_4 = \mu \sqrt{M\pi(\lambda + M\pi)}, \quad \kappa'_4 = \mu \sqrt{M\pi(M\pi - \lambda)}, \quad A_4 \sim D_4 \text{ および } A_5 \sim D_5 \text{ は積分定数}$$

と置く²⁾, 四辺単純支持矩形板の固有値 λ は $\lambda_0 \geq M\pi$, および $\lambda_0 \geq 2(N\pi\mu)$ なる条件を満足する³⁾. 他方

本題の無梁板は単に四辺の仕が単純支持された矩形板より構造的に剛²⁾であるゆゑ, その固有値 λ に關して $\lambda > M\pi$, $\lambda > 2(N\pi\mu)$ とあるといへる. したがって, 式(3)からえられる9種類の組合せのうち, 上記条件式を満足するものの仕が物理的意義をもち, 結局次の一式で与えられることとなる.

$$w_1 = (A_4 \sin \kappa_1 \xi + B_4 \cos \kappa_1 \xi + C_4 \sin \kappa_2 \xi + D_4 \cos \kappa_2 \xi) \sin M\pi \eta \\ + (A_5 \sin \kappa_3 \eta + B_5 \cos \kappa_3 \eta + C_5 \sinh \kappa_4 \eta + D_5 \cosh \kappa_4 \eta) \sin M\pi \xi \quad (4)$$

つまり, 特殊解 w_0 は次のように誘導する. 式(1)の右辺 $g(x, y)$ は板に作用する垂直荷重であるが, 本題の無梁板では中間支束反力の仕が該当する. そこで, 各中間支束反力を二重正弦フーリエ級数に展開のうえ, その総和を求めれば $g(x, y)$ が次のようにえられる.

$$g(x, y) = \frac{-4}{\pi^2 a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{ij} \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} \sin m\pi \xi \cdot \sin m\pi \eta \cdot \sin m\pi \xi \cdot \sin m\pi \eta \quad (5)$$

こゝに, $(a\xi_i, b\eta_j)$ は中間支束 ij の座標値であり, また V_{ij} は上向きを正, $g(x, y)$ は下向きを正とする. 式(5)の関数形状を考慮して, 特殊解 w_0 を二重正弦フーリエ級数で表わされるものと仮定し, 式(5)と式(1)に代入すれば, w_0 が次式のごとく算定される.

$$w_0 = -\frac{a^4}{\pi^4 \mu D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} V_{ij} \sin m\pi \xi \cdot \sin m\pi \eta}{\{(m^2 + n^2 \mu^2)^2 - (m\lambda/\pi)^4\}} \sin m\pi \xi \cdot \sin m\pi \eta \quad (6)$$

式(4)および式(6)から, 式(1)の一般解 w が結局次のごとくえられることとなる.

$$w = (A_4 \sin \kappa_1 \xi + B_4 \cos \kappa_1 \xi + C_4 \sin \kappa_2 \xi + D_4 \cos \kappa_2 \xi) \sin M\pi \eta \\ + (A_5 \sin \kappa_3 \eta + B_5 \cos \kappa_3 \eta + C_5 \sinh \kappa_4 \eta + D_5 \cosh \kappa_4 \eta) \sin M\pi \xi \\ - \frac{a^4}{\pi^4 \mu D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} V_{ij} \sin m\pi \xi \cdot \sin m\pi \eta}{\{(m^2 + n^2 \mu^2)^2 - (m\lambda/\pi)^4\}} \sin m\pi \xi \cdot \sin m\pi \eta \quad (7)$$

(b) 座屈条件式 本題の無梁板は四辺単純支持であるゆゑ, その境界条件は次のごとくである.

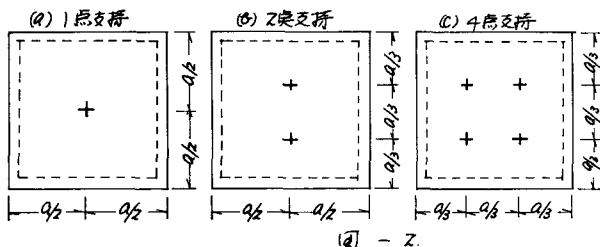
$$\xi = 0, 1 \text{ 時 } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \quad \eta = 0, 1 \text{ 時 } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (8)$$

また, 無梁板の座屈時における中間支束 kl の垂直変位を d_{kl} とし, さらに, これら変位量が作用反力に比例するものと考へ, その比例定数を γ_{kl} とす. したがって, 式(7)の弾性曲面は各中間支束位置において支束の垂直変位 $d_{kl} = \gamma_{kl} V_{kl}$ に等しくなっているから $n+1$ とすべき次の条件式をうる.

$$w(\xi_k, \eta_l) = \gamma_{kl} V_{kl} \quad (\text{こゝに, } k=1, 2, \dots, r; \quad l=1, 2, \dots, s) \quad (9)$$

式(8)および式(9)の各条件式に式(7)を代入してえられる諸式を全て連立させれば, 未知数 A_4, B_4, D_4 および V_{kl} を求めたための基本連立方程式をうるが, 定数項はすべて0である. したがって, 解が存在するためには, 上記の基本連立方程式の係数行列式が0とならなければならない⁴⁾, したがって, 座屈荷重 P が求められることとなる.

(c)欄に示す諸値をうる。表-1において右肩に*印を付したものは四辺単純支持正方形板の固有振動群の中に見出される値であり、したがって、座屈後形は式(7)のごとく与えられ、四辺単純支持板のそれと合致する。 $w = A \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$ (1)



*印のたゞ固有振動群では、式(10)の左正に於いて全ての要素が0となることは別がたいて、式(7)における積分定数 $A_1 \sim D_4$, および $A_9 \sim D_9$ は11個の恒等的に0となり、したがって座屈後形は式(7)で与えられることとなる。

次数	(a) 1点支持	(b) 2点支持	(c) 4点支持
1	7.8540*	7.8540*	10.4720*
2	10.0721	10.1150	12.3450
3	12.5668*	12.5668*	18.6136*

表-1. 固有値入

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{kmn}) \sum_{i=1}^4 V_{ij} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \sin m\pi\zeta \sin n\pi\eta \quad (2)$$

$$\text{ただし: } V_{ij} = -\frac{4a^2}{\pi^2 b^2} T_{ij}, \quad V_{ij} = T_{ij}/V_0$$

図-2 (a)~(c)の各無梁板に対して1次および2次の座屈後形を求めれば図-3のごとくである。

(2) 図-4に示すごとく、中間支梁が対角線上に移動する場合に於ては、無梁板の一次固有値は図-5の実線で示されるごとく変化する。また、 $y=b/2$ の線上に移動する場合に於ては、実線のごとく変化する。図-6は、図-2 (a)の無梁板において、中間支梁の作用反力に比例する垂直変位を起す場合について考察したものである。すなわち、本例の一次固有値は支持変位が0の場合 ($\delta=0$) の値 7.8540から、 δ が増大するにつれて減少し、 $\delta \rightarrow \infty$ で中間支梁のたゞ単純支持板の固有値 $\lambda = 6.2832$ に漸近する。

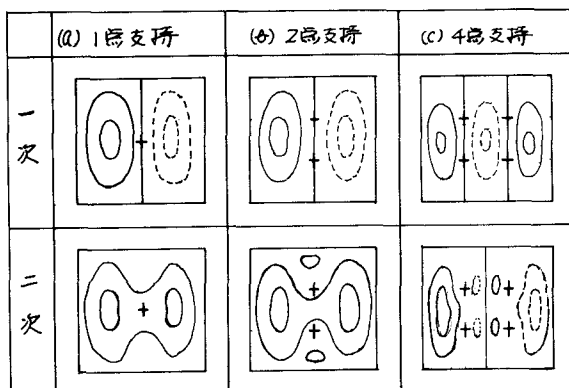


図-3

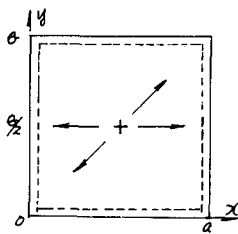


図-4

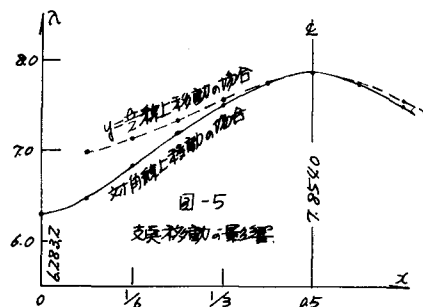


図-5

変位移動の影響

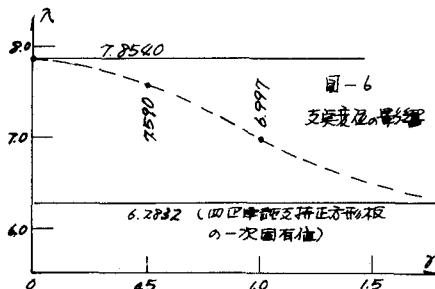


図-6

変位移動の影響

参考文献

- 1) 棚橋鏡: moment を受ける板の接合部応力状態の研究. 建築雑誌. 昭和6年3月.
- 2) 坪井・宮崎: 水平力を受ける無梁板構造. 建築学会論文集 第38号. 昭和24年4月.
- 3) S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability. McGRAW-HILL Book Comp. 1936.