

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 〇 横田 漢

1. 緒言

弾性基礎にある構造物の動的応答がその基礎に支配されると、基礎の応答もまたその上部構造物の影響を受けることは当然である。本論文は基礎に対する構造物のかかる影響を考察すべく、まず、構造物として板を取り上げ、それが走行線荷重を受ける場合の基礎の応力状態（以降 plate 状態と称す）を解明したのち基礎に直接その荷重が作用する場合（以降 non plate 状態と称す）の解析結果との比較検討を行い、とって板の基礎に対する効果を吟味したものである。

なお、基礎は半無限弾性体と見做し、以下の仮定を用いる。

(i) 板および基礎の振動状態は定常であり、荷重とともに移動する系から見れば、それらの変形は一定である。

(ii) 荷重の走行速度は基礎における P 波、S 波の伝播速度より小さい。

2. 解法

1) plate 状態 図-1 に示すごとく、基礎における x, z 方向の変位を u, w とし、それを用いたポテンシャル函数 ϕ を用いて次式のごとく表わす。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1)$$

しかると、基礎における波動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi, \quad \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi \quad (2)$$

$$\text{ここで } \beta = C_L/C_T, \quad \tau = C_L t, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

C_L : P 波の伝播速度, C_T : S 波の伝播速度

また、応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{xx} = \lambda_1 \nabla^2 \phi + 2G_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right), \quad \sigma_{zz} = \lambda_1 \nabla^2 \phi + 2G_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = G_1 \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right), \quad \lambda_1 = E_1 \nu_1 / (1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1), \quad G_1 = E_1 / 2(1 + \nu_1)$$

1) は、定常状態の仮定より $r = x - Ct = x - \beta z$ なる関係式を導入し、式(2)に代入すれば次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + m^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + n^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \quad (4)$$

$$\text{ここで } m^2 = 1 - \beta^2, \quad n^2 = 1 - \beta^2, \quad \beta_L = C/C_L, \quad \beta_T = C/C_T, \quad C: \text{荷重速度 (一定)}$$

式(4)にフーリエ変換を施し、その解を求めれば結局次式のごとくえられる。

$$\Phi = B e^{-i m \alpha (z - \beta z)} \quad , \quad \Xi = D e^{-i n \alpha (z - \beta z)} \quad (5)$$

ただし

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i \alpha r} d\alpha, \quad \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi e^{i \alpha r} d\alpha \quad (6)$$

そこで、式(1)、(3)中の $w, \sigma_{xx}, \tau_{zx}$ にフーリエ変換を施し、式(5)の Φ, Ξ を代入すれば結局次式を得る。

$$w = -i m \alpha B e^{-i m \alpha (z - \beta z)} - i \alpha D e^{-i n \alpha (z - \beta z)}$$

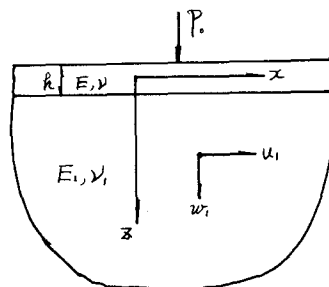


図-1

$$\frac{\bar{\sigma}_{z1}}{2q_1} = d^2 \left[\left(1 + \frac{\lambda_1}{2q_1}\right) m^2 - \frac{\lambda_1}{2q_1} \right] \cdot B \cdot e^{-|m| \cdot \bar{z}} + i d |n d| \cdot D \cdot e^{-|n d| \cdot \bar{z}} \quad (7)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{z1}}{q_1} = -2 \lambda d |m d| \cdot B \cdot e^{-|m| \cdot \bar{z}} + d^2 (1 + m^2) \cdot D \cdot e^{-|m| \cdot \bar{z}}, \quad \bar{z} = z - b/2$$

ここで, $m, n, \bar{\sigma}_{z1}, \bar{\sigma}_{z2}$ はそれぞれ $w, \sigma_{z1}, \sigma_{z2}$ のフーリエ変換である。

他方, 板の振動微分方程式より, 板の応力 w に関して式(7)が容易にえられる。

$$W = \frac{P_0 - Q}{N \cdot H(u)}, \quad H(u) = d^2 (d^2 - \frac{p R}{N} \cdot c^2) \quad (8)$$

ここで

W, Q はそれぞれ板の応力 w , 基礎の反力 q のフーリエ変換である。

次に, 板と基礎の接触面 ($z = b/2$) において下記の二つ境界条件を考える。すなわち

$$w = w_1, \quad q = -\sigma_{z1}, \quad \tau_{zx1} = 0 \quad (9)$$

式(9)の各境界条件式の両辺をフーリエ変換し, 式(7), (8)を代入すれば未定係数 B, D がそれぞれ次式のとく決定される。

$$B = \frac{P_0 R^3}{N d^2} \cdot \frac{2 - \beta_+^2}{H(WR)}, \quad D = \frac{P_0 R^3 2 \lambda |d|}{N \cdot d^3} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2}}{H(WR)} \quad (10)$$

ここで

$$H(WR) = \beta_+^2 \sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2} \left\{ (|WR|)^3 - 6(1 - \nu) \cdot \frac{1}{2} \beta_+^2 |d| R \right\} - 24(1 - \nu) g R$$

$$R = (1 - \beta_+^2/2)^2 - \sqrt{1 - \beta_+^2} \sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2}, \quad g = \xi/\eta, \quad l = \xi/\delta$$

式(10)の B, D を式(7), (8)に代入する式(9)を用いて基礎に及ぶ応力を求めれば次式のとくである。

$$\sigma_z = -\frac{P_0}{R} \cdot \frac{24(1 - \nu) g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Phi(\xi, \bar{z})}{H(\xi)} \cos(R\xi) d\xi \quad (11)$$

$$\sigma_z + \sigma_z = -\frac{P_0}{R} \cdot \frac{24(1 - \nu) g}{\pi} \cdot K(\beta_r/\beta) \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2} \cdot \bar{z} \xi}}{H(\xi)} \cos(R\xi) d\xi$$

ここで

$$\Phi(\xi, \bar{z}) = (1 - \beta_+^2/2)(1 + \beta_+^2/2 - \beta_+^2/\beta_-^2) e^{-\sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2} \cdot \bar{z} \xi} - \sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2} \sqrt{1 - \beta_+^2} e^{-\sqrt{1 - \beta_+^2} \cdot \bar{z} \xi}$$

$$K(\beta_r/\beta) = \beta_+^2/\beta_-^2 \cdot (\beta_-^2 - 1)(1 - \beta_+^2/2), \quad \xi = d \cdot h, \quad R = r/R$$

2) non plate 状態 式(11)において $R \rightarrow 0$ とすれば, 板のない場合の応力分布が直接基礎

に作用する場合の応力が次式のとく求められる。

$$\sigma_z = \frac{P_0}{R} \cdot \frac{1}{\pi R} \int_0^\infty \Phi(\xi, \bar{z}) \cos(R\xi) d\xi \quad (12)$$

$$\sigma_z + \sigma_z = \frac{P_0}{R} \cdot \frac{K(\beta_r/\beta)}{\pi R} \int_0^\infty e^{-\sqrt{1 - \beta_+^2/\beta_-^2} \cdot \bar{z} \xi} \cos(R\xi) d\xi$$

3. 算例および考察

いま, $\nu = \nu = 0.25$, $l = 0.694$, $g = 0.125$ の場合における式(11), (12)の応力を算出し, 荷重直下 ($R = 0$) における諸値を図示すれば図-2のとくである。

図中(a), (b)および(c), (d)はそれぞれ荷重速度 β および深さ $\bar{z}$ をパラメーターとした場合における plate 状態の応力図を示し, (e), (f)は non plate 状態に関して(c), (d)と同様, $\bar{z}$ をパラメーターと考える場合の応力図である。

なお同図中(e)は plate, non plate 状態における応力分布を比較するため $\beta_+ = 0.2$ の場合のとく

その値を図示したものである。

これらの諸図より支持板の効果として次のことが認められる。

i) non plate, Plate いずれの状態においても基礎の表面で応力が無限大となるが、前者が双曲線(4)の形を起すのに対し、後者は特異点の形を生ずる。

ii) σ_x は荷重が静的に作用する場合、non plate 状態では 0 となるが Plate 状態ではある値を有し、かつ荷重重の場合でも non plate 状態においてより急激に 0 に近づく。(9) 参照

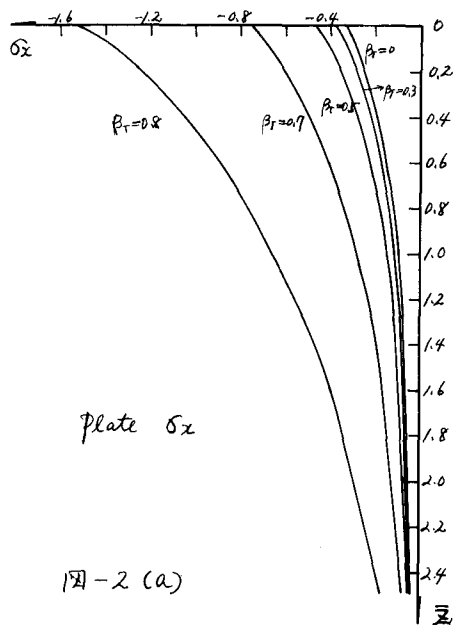


図-2 (a)

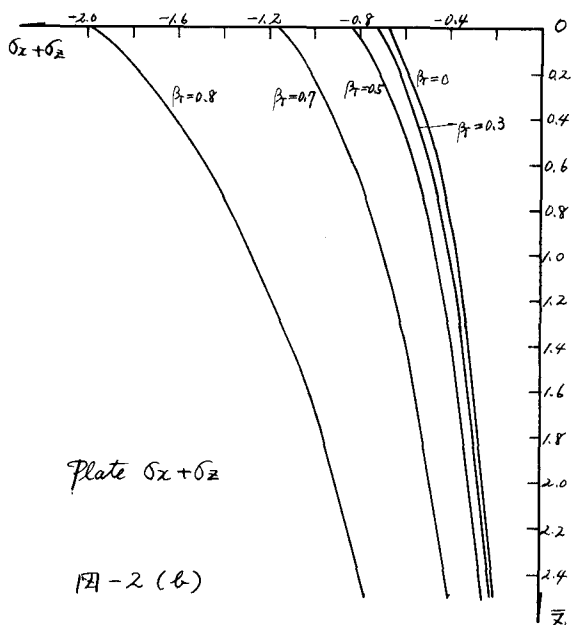


図-2 (b)

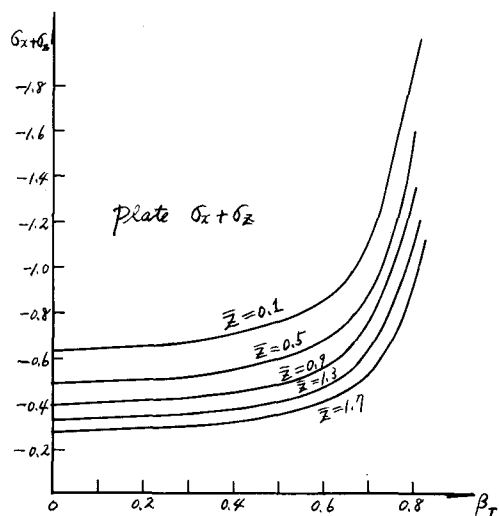


図-2 (c)

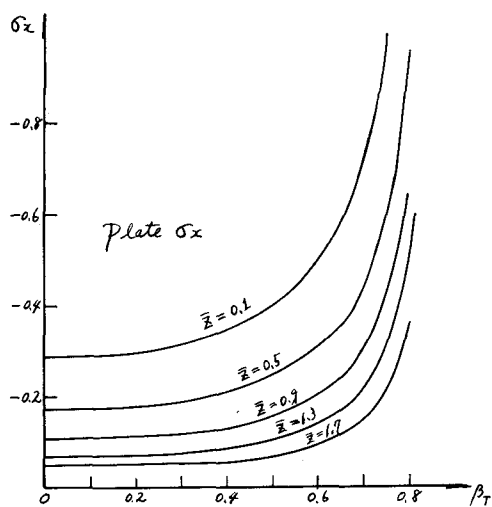


図-2 (d)

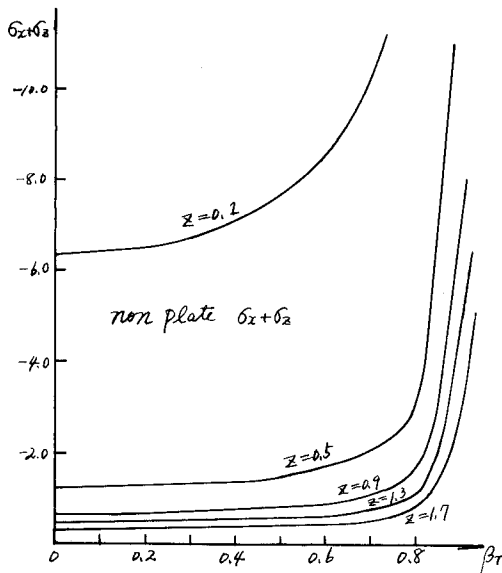


図-2 (e)

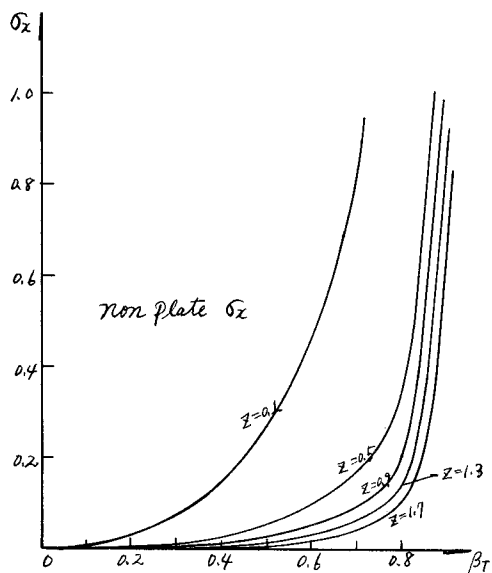


図-2 (f)

iii) β_T 関係なく σ_z は常に non plate 状態の場合の方が plate 状態の場合より大きい。

次に動的効果として次のことが言える。

- i) plate 状態においては σ_x , $\sigma_x + \sigma_z$ のいずれも $\beta_T < 0.3$ の範囲においては動的効果の影響がそれほど見受けられない。(10), (11) 参照)
- ii) non plate 状態に関しては σ_z と $\sigma_x + \sigma_z$ の両方かなり相違があり、 σ_x の値に対する動的効果の影響が plate 状態と比較して著しく異なる。(10), (11) 参照)

4. 結論

以上に見ると、plate 状態における基礎の応力特性が明らかになり、本解法は未だ二次元解析であり、今後三次元問題としての展開を企図している。なお、図(1), (11)において応力が無限大となる β_T の値 (critical velocity) があるが、これはこの値に対して $\sqrt{1 - \beta_T^2} = 0$ が二重根をもつためである。

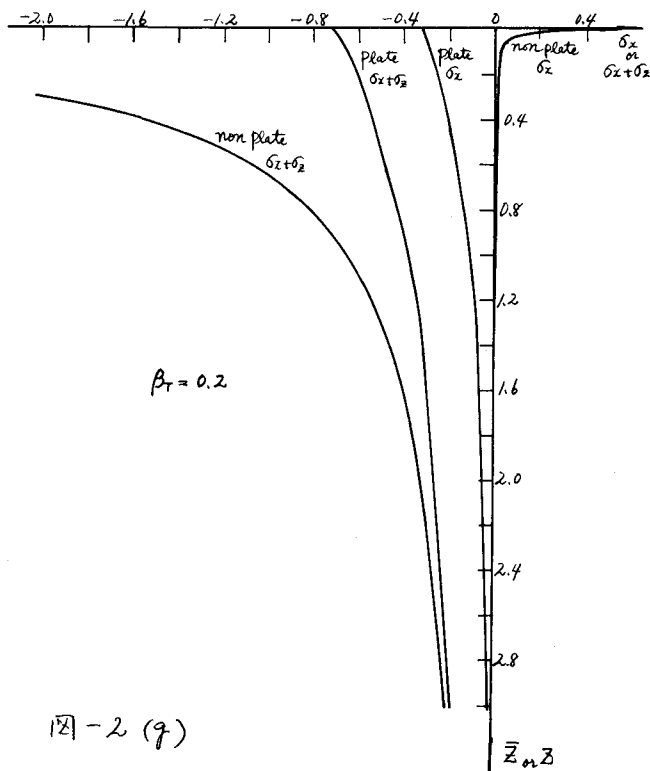


図-2 (g)