

1. 予えがき

成層構造を有する地盤の地震応答解析には各種の方法が研究されているが、弾性波動の重複伝播を考慮する波動理論を用いる方法が常道である。しかし、基盤に対して地盤自体を振動体と考えれば、連続体或いは多値変系としての振動応答を論ずることもできる。地震時において地盤を伝わる地動は多くの場合下の基盤から上方へ伝播する剪断波によって卓越するので、今基盤から入射する地動が地盤層において剪断変形の外により伝わるものとする。地層が水平で、しかも水平方向には等質であると思えば地盤の横方向への広がりや地盤層には影響を与えない。従って本研究は図1に示すように地盤を半無限の水平層の積み重ねである剪断波を有する構造物と見做し、この剪断波の振動方程式を導き、その厳密解を求めることに主眼をおいた。そしてこの解析方法を用いて、二層構造を有する青森県長浜橋梁敷地盤の軟弱地盤を例にとり地震応答解析を行った。

2. 振動方程式およびその厳密解

i) 弾性特性一定なる単層地盤の剪断振動

図1に示す単位幅の柱状連続梁に見做した地盤層に、水平地震動 $z(t)$ が基盤から入射するとき、地盤が剪断変形の外により振動するものとする。今基盤上の地盤が単層で、しかも等質である場合、その剪断振動方程式は梁の微小部分の動的な釣合いを考えて次のようになる。

$$\rho \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[G \frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \right] \quad (1)$$

ここに、 ρ 、 c 、 G は単位重量、粘性減衰係数および剪断

弾性係数で、 $u(y,t)$ は深さ y における時刻 t での水平変位である。外力地震動による強制力を考慮すると、 $\rho \ddot{u}(y,t) + c \dot{u}(y,t) - G u''(y,t) = -\rho \ddot{z}(t)$ ----- (2)

ここに、ドットは時間微分、ダッシュは y についての微分で、以後同様に用いる。(2) 式は2階偏微分方程式であるが、変数分離法によってモード型と固有振動数を導くことにより解くことができる。今定数係数であるため境界条件が決まれば、固有値は(1)式から簡単に得られる。地表における水平剪断応力を0、地盤と基盤との境界 H において相対変位を0とすれば、境界条件は

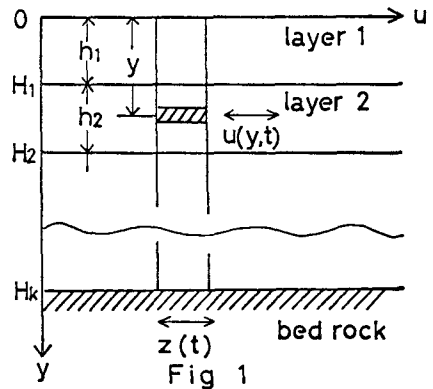
$$G u'(0,t) = 0 \quad (3) \quad u(H,t) = 0 \quad (4)$$

そして(2)式の一般解を y と t の関数に変数分離してその積と表わすと

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) T_n(t) \quad (5) \quad \text{これを適当に微分して(2)に代入すると、}$$

$$\rho Y_n(y) \ddot{T}_n(t) + c Y_n(y) \dot{T}_n(t) - G Y_n''(y) T_n(t) = -\rho R_n \ddot{z}(t) \quad (6)$$

ここに、モード型を有する無限級数の意味を持たせて Σ を省略する。そして右辺を無限級数に展開し、展開係数を R_n としておく。固有値を求めるための辺=0なる同次式より次のように P_n をおく。



$\ddot{Y}_n/T_n + (C/P) \dot{Y}_n/T_n = (G/P) Y_n''/Y_n = -P_n^2$ において y のみと t のみに関する式を得る。

$$Y_n'' + \alpha^2 P_n^2 Y_n = 0 \text{------(7)} \quad \ddot{T}_n + 2h_n P_n \dot{T}_n + P_n^2 T_n = -R_n \ddot{Z} \text{------(8)}$$

ここに, $\alpha = \sqrt{P/G}$, $h = C/2P P_n$ である。まず (7) 式を (3), (4) の境界条件のもとに解く。一般解

$Y_n(y) = A \cos \alpha P_n y + B \sin \alpha P_n y$ に境界条件 $Y_n'(0) = 0$, $Y_n(H) = 0$ を用いて, n 次モード型 $Y_n(y)$ と固有振動数 P_n を求める。振動数方程式 $\cos \alpha P_n h = 0 \text{------(9)}$

$$\text{より, } P_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\alpha h} \quad (\text{固有周期は } T = \frac{2\pi}{P_n}) \quad Y_n(y) = A \cos \left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \cdot \frac{y}{h} \right] \text{------(10)}$$

次に (8) 式の展開 (刺激) 係数 R_n を求める。つまり (6) 式の右辺を (3), (4) の境界条件を満たす直交函数系 $Y_n(y)$ によって無限級数に展開するが一般に区間 $(1, 0)$ にて定義された微分可能な任意函数 $f(\xi)$ は $Y_n(\xi)$ によって次のように展開される。 $f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n Y_n(\xi)$, ただし $R_n = (M_n) \int_0^1 f(\xi) Y_n(\xi) d\xi$ ($0 \leq \xi \leq 1$) で M_n は直交条件 $\int_0^1 Y_n(\xi) Y_m(\xi) d\xi = 0$ ($m \neq n$) or M_n ($m=n$) で表わされる n 次モード一般質量である。従って展開係数 R_n は $M_n = \int_0^1 Y_n^2(\xi) d\xi = \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \xi \right] d\xi = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin(2n-1)\pi}{(2n-1)\pi} \right]$

$$\text{より, } R_n = \frac{1}{M_n} \int_0^1 \cos \left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \xi \right] d\xi = \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = -\frac{(-1)^n 4}{(2n-1)\pi} \quad (0 \leq \xi = \frac{y}{h} \leq 1) \text{------(11)}$$

(8) 式は非同次 2 階常微分方程式であるから定数変化の方法で解く。強制振動のみ求めると,

$$T_n(t) = -(R_n/P_n) \int_0^t \ddot{Z}(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sin P_n(t-\tau) d\tau \text{------(12)}$$

ここに, $\lambda_n = h_n P_n$, $P_n = P_n \sqrt{1 - h_n^2}$ である。また速度応答, 加速度応答は

$$\dot{T}_n(t) = -(R_n/P_n) \int_0^t \dot{Z}(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \left[-\lambda_n \sin P_n(t-\tau) + P_n \cos P_n(t-\tau) \right] d\tau \text{------(13)}$$

$$\ddot{T}_n(t) = -(R_n/P_n) \int_0^t \ddot{Z}(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \left[(\lambda_n^2 - P_n^2) \sin P_n(t-\tau) - 2\lambda_n P_n \cos P_n(t-\tau) \right] d\tau - R_n \ddot{Z}(t) \text{------(14)}$$

以上より求める相対変位, 相対速度および加速度の応答は (10), (12), (13), (14) と (5) 式から

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) T_n(t), \quad \dot{u}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \dot{T}_n(t), \quad \ddot{u}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \ddot{T}_n(t) \text{------(15)}$$

ii) 二層地盤の剪断振動

弾性特性が一定なる層が k 層ある地盤構造は図 1 に示した。剪断振動の方程式は単層の場合と同様に各層において, $P_k \ddot{u}_k(y, t) + C_k \dot{u}_k(y, t) - G_k u_k(y, t) = 0 \text{------(16)}$

今二層構造を考えているので $k=1, 2$ としよう。 P_k, C_k, G_k は各層の弾性定数である。層の境界においては上層と下層の変位が等しく, 上層と下層に働く水平剪断応力が等しい。よって境界条件は,

$$G_1 u_1'(0, t) = 0 \text{------(17)} \quad u_1(H_1, t) = u_2(H_1, t) \text{------(18)}$$

$$G_1 u_1'(H_1, t) = G_2 u_2'(H_1, t) \text{------(19)} \quad u_2(H_2, t) = 0 \text{------(20)}$$

$$(16) \text{ 式の一級解は単層の場合と同様に, } u_k(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{kn}(y) T_{kn}(t) \text{------(21)}$$

と書ける。変数分離して y のみと t のみの式に変形して,

$$Y_{kn}'' + \alpha_k^2 P_{kn}^2 Y_{kn} = 0 \text{------(22)} \quad \ddot{T}_{kn} + 2A_{kn} P_{kn} \dot{T}_{kn} + P_{kn}^2 T_{kn} = 0 \text{------(23)}$$

ただし, $\alpha_k = \sqrt{P_k/G_k}$, $h_{kn} = C_k/2P_k P_{kn}$ であるが上, 下層の境界において連続であり連続振動をすることから当然, 減衰係数および固有振動数はそれぞれ相等しく $h_{1n} = h_{2n} = h_n$, $P_{1n} = P_{2n} = P_n$ である。

$$(22) \text{ 式の一級解 } Y_{kn}(y) = A_k \cos \alpha_k P_n y + B_k \sin \alpha_k P_n y \text{------(24)}$$

は (17), (18), (19), (20) の境界条件より $Y_{1n}'(0) = 0$, $Y_{1n}(H_1) = Y_{2n}(H_1)$, $G_1 Y_{1n}'(H_1)/Y_{1n}(H_1) = G_2 Y_{2n}'(H_1)/Y_{2n}(H_1)$, $Y_{2n}(H_2) = 0$ がいえるから, 固有モード型 $Y_{1n}(y), Y_{2n}(y)$ および固有振動方程式は,

$$Y_{1n}(y) = A_1 \cos \alpha_1 P_n y \text{ ----- (25)} \quad Y_{2n}(y) = A_1 \frac{\cos \alpha_1 P_n h_1}{\sin \alpha_2 P_n h_2} \sin \alpha_2 P_n (H_2 - y) \text{ ---- (26)}$$

$\alpha_1 \tan \alpha_1 h_1 P_n \tan \alpha_2 h_2 P_n = 1 \text{ ----- (27)}$ ここに h_k は k 番目の地層の厚さ (図1) で、 α_k は $\alpha_k = \sqrt{P_k - G_k - 1 / P_k G_k}$ を表す。振動数方程式 (27) は超越方程式であるため根を求めることが難しく、一般にはグラフを利用して数値解法により解く。 $\varphi = \alpha_1 \tan \alpha_1 h_1 P_n$, $\varphi = \alpha_2 \tan \alpha_2 h_2 P_n$ なる函数のグラフ上の交点のうち正数値のものより $P_1, P_2, \dots, P_n \text{ ----}$ としておく。

次に基盤より外力地震波 $\ddot{z}(t)$ が加わる場合 (23) 式は

$$\ddot{T}_n + 2h_n P_n \dot{T}_n + P_n^2 T_n = -R_n \ddot{z} \text{ ----- (28)}$$

で表わされる。無限級数の展開係数 R_n を上・下層の直交函数系 Y_{1n}, Y_{2n} により求める。 n 次モード一般質量および刺激係数 R_n は次の様に計算される。

$$M_{1n} = \int_0^1 \cos^2 \alpha_1 h_1 P_n \xi d\xi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha_1 h_1 P_n}{2\alpha_1 h_1} \right) \quad (0 \leq \xi = \frac{y}{h_1} \leq 1) \text{ ---- (29)}$$

$$M_{2n} = \int_0^1 \left(\frac{\cos \alpha_1 h_1 P_n}{\sin \alpha_2 h_2 P_n} \sin \alpha_2 h_2 P_n \zeta \right)^2 d\zeta = \frac{\cos^2 \alpha_1 h_1 P_n}{2 \sin \alpha_2 h_2 P_n} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha_2 h_2 P_n}{2\alpha_2 h_2 P_n} \right) \quad (0 \leq \zeta = \frac{H_2 - y}{h_2} \leq 1) \text{ -- (30)}$$

$$R_{1n} = \frac{1}{M_{1n}} \int_0^1 \cos \alpha_1 h_1 P_n \xi d\xi = \frac{4 \sin \alpha_1 h_1 P_n}{2\alpha_1 h_1 P_n + \sin 2\alpha_1 h_1 P_n} \text{ ----- (31)}$$

$$R_{2n} = \frac{1}{M_{2n}} \int_0^1 \frac{\cos \alpha_1 h_1 P_n}{\sin \alpha_2 h_2 P_n} \sin \alpha_2 h_2 P_n \zeta d\zeta = \frac{4 \sin \alpha_2 h_2 P_n (1 - \cos \alpha_2 h_2 P_n)}{\cos \alpha_1 h_1 P_n (2\alpha_2 h_2 P_n - \sin 2\alpha_2 h_2 P_n)} \text{ ----- (32)}$$

よって (28) 式の一般解は定数変化の方法により強制振動のみについて書けば、

$$T_n(t) = -R_{kn} \int_0^t \ddot{z}(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sin P_n(t-\tau) d\tau \text{ ----- (33)}$$

ここに、 $\lambda_n = h_n P_n$, $P_n = P_n \sqrt{1 - h_n^2}$ である。応答値は (21) で与えられ、速度応答、加速度応答も単層地盤の場合と同様に、 $\dot{u}_k(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{kn}(y) \dot{T}_{kn}(t)$, $\ddot{u}_k(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{kn}(y) \ddot{T}_{kn}(t) \text{ ----- (34)}$

iii) 多層地盤の剪断振動

k 層地盤構造 (図1) の剪断振動方程式は (16) 式で示される。層と層との境界における条件として (18), (19) の関係のように各層境界において相対変位が等しく、水平剪断応力が等しいとすれば多層構造にまで拡張できる。固有函数 $Y_n(y)$ を与える式 (24) と境界条件より (9), (27) に相当する固有振動数方程式を求めると、

$$\text{三層地盤} \quad \alpha_1 \alpha_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 + \alpha_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \alpha_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{四層地盤} \quad & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_4 + \alpha_1 \alpha_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 + \alpha_2 \alpha_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_4 \\ & - \alpha_3 \alpha_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 + \alpha_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 + \alpha_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \\ & + \alpha_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{多層} \text{ ----- (35)}$$

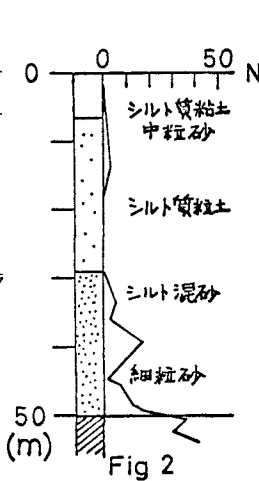
ここに、 $\alpha_k = \sqrt{P_k - G_k - 1 / P_k G_k}$, $\varphi_k = \alpha_k h_k P_n$ である。一般に k が2以上なる多層構造の場合、振動数方程式 (35) は超越方程式となるため前述のように数値解法によって解く。

3. 二層構造と見做せる青森県長泥橋架設地盤の軟弱地盤層の振動応答

長泥橋架設地盤での地盤の振動測定の結果、表1に示すような地盤特性を有することが判った。ただし、 V_s は剪断波の速度である。粘性減衰係数 h_n を約0.2として C を決めた。図2のボーリングによる柱状図から地盤の厚さ $h_1 = 30 \text{ m}$, $h_2 = 20 \text{ m}$ ($H_1 = 30 \text{ m}$, $H_2 = 50 \text{ m}$) が判る。

以上の地盤特性を
有する場合の固有振
動数方程式 (27) の根

P_n は数値解法によ
り $P_1 = 5.5823$, $P_2 =$
 15.1082 , $P_3 = 24.3152$,
 $P_4 = 35.4393$, $P_5 = 45.3137$
---, 固有周期は $T_1 =$
 1.126 , $T_2 = 0.4159$, $T_3 =$
 0.2584 , $T_4 = 0.1779$, $T_5 =$
 0.1387 秒 ---。



V_s cm/sec	ρ kg/cm ³	c kg/cm ³ sec	G kg/cm ³ sec ²
1.4×10^4	1.8×10^{-3}	4.5×10^{-3}	3.53×10^5
2.0×10^4	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-3}	800×10^5

Table 1

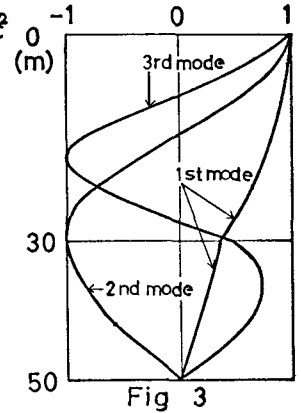


Fig 3

10 次まで計算したが固有振動モードは図
3 に 3 次まで示しておく (α, β で $A_1 = 1$)。

次に 1968 年 5 月に発生した十勝沖地震
の余震の一つで長泥橋において測定した加
速度記録 NS 成分と動圧を外力として用い

(21), (34) の応答値を数値計算により求めた。
そのうちの地表における応答を図 4 に示し
ておくが, ここで用いた外力地震波 (図 4
の $\dot{z}$) は基盤表面 ($y = H_2$) における記録では
なく地表面 ($y = 0$) におけるものであること
を断っておく。図 4 (a) の波形は外力波
 $\dot{z}$ (破線) と絶対加速度応答波 (実線) で
あるが, 位相のずれに注目したい。また図

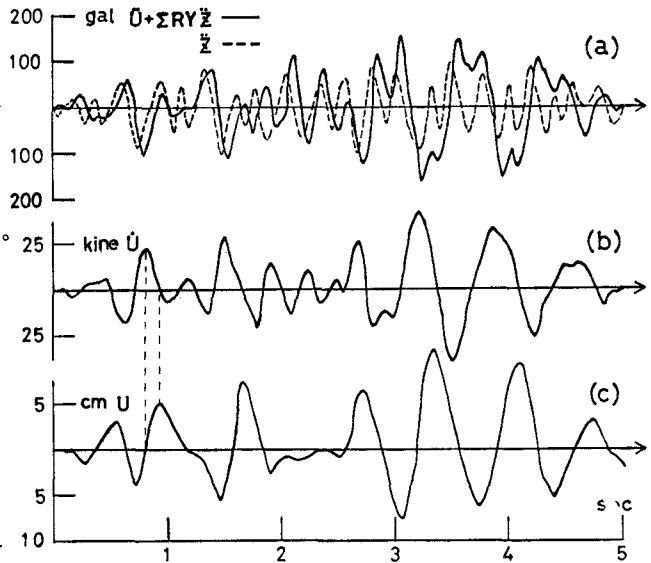


Fig 4

4 (b), (c) の波形は相対速度, 相対変位であ
るが当然のことながら一周期の速度最大において変位が 0, 変位最大においては速度 0 を示している。

4. あとがき

以上地盤の地震応答解析の一方法として, 連続剪断梁と見做した地盤の振動応答について若干考察
してみたが, 結果は文献 3 (金井) 他 の波動理論による方法とも一致を示す。なお地層中の地震応答およ
び水平剪断応力等は紙面の関係で省略した。計算には HARP 103 および NEAC 2203 G を用いた。

参考文献

- 1 I.M. Idriss and H.B. Seed, "SEISMIC RESPONSE OF HORIZONTAL SOIL LAYERS", proc. of A.S.C.E. 1968
- 2 渡辺 昇, "デジタルコンピュータとアナログコンピュータによる地震応答解析法について"
土木学会北海道支部講習会テキスト S43.
- 3 金井 清, "地表層の性質と地震動振幅との関係", 地震大震研彙報 30 (1952), 35 (1957), 他.
- 4 田谷朱鏡二他, "青森県長泥橋の橋脚の振動測定と地盤調査", 北大地球物理学研究報告 S44.2.