

大阪市立大学 正員 倉田宗章
 大阪工業大学 正員 岡村宏一
 日本道路公団大阪社 正員 多田治彦
 大阪設計コンサルタンツKK 正員 進藤泰男

1) まえがき さきに、本州四国連絡橋下部工の一形式として立案されている多柱式基礎の平面振動、立体振動について報告した。この基礎は図-1に概要を示すように大口径の鋼製 *Cylinder* を沈下根入れさせて、支持層に到達させ、頂部を剛な頂板で連結する大規模なものである。特にこの構造は施工上の制約のため水深の大きなところで並立した *Cylinder* によって構成されており、海底地盤の傾斜や、地震の作用方向等を考慮すれば、ねじれ振動も含めた立体振動についても構造上安全であるかどうかについて検討しておくなければならない。本文では、この基礎について任意方向の地震力を受けた場合の立体構造としての並進、ロッキング、ねじりの剛体系振動と柱の弾性振動を連成させる解析法を述べ、地震の作用方向を種々変化させたときのねじれを含む応答振動系の変化を比較検討し、その安全性をにしかめた。

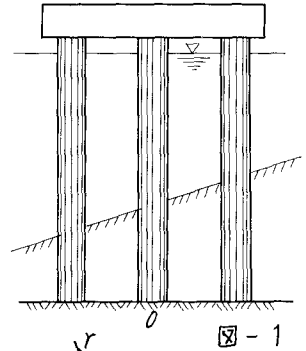


図-1

2) 基本仮定 頂板は剛体、柱及び地盤は弾性体と見做し、各柱は等脚、剛度一定とし、若干個の *lumped mass* に、頂板は単一 *mass* に分割し、地盤も集中バネで置換する。地震作用方向は図-2に示すように任意角 θ で定義された *S* 軸で、直角方向は *r* 軸で表わす。この系の振動は構造全体の剛体としての並進運動、回転運動及び、ねじれ振動と柱の構造要素としての弾性振動、以上4つの連成されたものである。

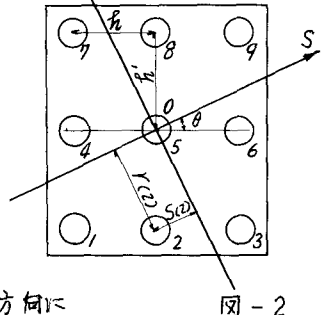


図-2

3) 水平運動方程式 式は便宜的に柱部分と頂板部分にわけて考える。

3-1) *lumped mass* について 立体振動であるため変位は *S*, *r* 2方向に発生する。図-3は *S* 方向の変形を示している。①-②線は柱の静止位置、

①-①線は地動 u_0 の並進位置、②-②線は柱頭部の拘束曲げによる弾性変形位置、③-③線はせん断変形とねじりによる *S* 方向変形の和である。

r 方向については、 $u_0 \rightarrow 0$, $g_k g_s \rightarrow g_k g_r$, $u_k \rightarrow v_k$ とおきかえればよい。

よって *j* 番柱の *lumped mass* m_k の *S*, *r* 方向の水平変位は

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{qk} &= u_{qk} + \sum_{f=1}^F g_{kf} g_s + u_0 = \zeta_{qk} + u_0 \\ \bar{v}_{qk} &= v_{qk} + \sum_{f=1}^F g_{kf} g_r = \zeta_{rk} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに ζ_{rk} , ζ_{qk} は算定の *S* 及び *r* 方向の全弾性変位量を示す。(図参照)

j 番柱の水平運動方程式は減衰力を考慮して次のように書かれる。

j 番目柱 *S* 方向変形図

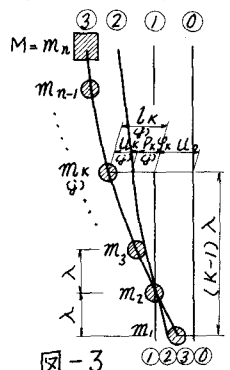


図-3

$$S \text{ 方向: } m_k(\ddot{u}_k + \ddot{y}_s \dot{p}_k) + \sum_{j=1}^n \dot{p}_{sj}^k u_{kj} + \dot{p}_{sn}^k \omega + C_k(\dot{u}_k + \dot{y}_s \dot{p}_k) = -m_k \ddot{u}_0 \quad (2)$$

$$r \text{ 方向: } m_k(\ddot{v}_k + \dot{y}_r \dot{p}_k) + \sum_{j=1}^n \dot{p}_{rj}^k v_{kj} + \dot{p}_{rn}^k \omega + C_k(\dot{v}_k + \dot{y}_r \dot{p}_k) = 0 \quad (3)$$

$$(j=1, 2, \dots, n), \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

ただし、 ω : 頂板におけるねじれ回転角、 $C_k = \mu m_k$: 減衰係数、 j は柱番号を示す。

$\dot{p}_{sj}^k = \dot{p}_{sj}^k$ (4) (円柱のため): 水平せん断力影響係数で図-4の如く *lumped*

mass の位置に支点を設けた連続梁を考え、この支点のみが単位変位するときの他の支

点に生ずる反力を求めれば、これが $\dot{p}_{sj}^k$ である。なお地中の mass については更に $\dot{p}_{rj}^k$

を加える必要がある。 $\dot{p}_{sn}^k, \dot{p}_{rn}^k$: 頂板が単位ねじれにときの k 点の反力、図-5を参

照して容易に次の関係が求まる。 $\dot{p}_{sj}^k = \dot{p}_{sj}^k r$, $\dot{p}_{rn}^k = -\dot{p}_{sn}^k S = -\dot{p}_{sn}^k S$ (5)

$\dot{p}_k$: 図-4の系の頭部に曲げを付かせ、各 mass 点の変位を頭部の回転角 θ で表わせ

ば、その係数として求まる。

3-2) 頂板について 頂板は剛体で質量は M である。よって各柱の変位は頂板の位置 ω においてすべて等しい。ただしねじれ変位は各柱頭で異なるので頂板ではねじれ振動は別の系として扱う。

$$M(\ddot{u}_n + \ddot{y}_s \dot{p}_n) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{p}_{sj}^n u_{kj} + C_n(\dot{u}_n + \dot{y}_s \dot{p}_n) = -M \ddot{u}_0 \quad (6)$$

$$M(\ddot{v}_n + \dot{y}_r \dot{p}_n) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{p}_{rj}^n v_{kj} + C_n(\dot{v}_n + \dot{y}_r \dot{p}_n) = 0 \quad (7)$$

$$I \ddot{\omega} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} (\dot{p}_{sj}^n u_{kj} + \dot{p}_{rj}^n v_{kj}) + \dot{p}_{sn}^n \omega + \bar{C} \dot{\omega} = 0 \quad (8)$$

ただし、 I : 頂板の垂直重心軸に對する慣性モーメント $= M \frac{R^2 + R'^2}{3}$ (R, R' は図-2参照)

$C_n = \mu M$, $\bar{C} = \mu I$: n 本のせん断減衰定数及びねじれ減衰定数

相反作用の定理より $\dot{p}_{sj}^n = \dot{p}_{sj}^n$, $\dot{p}_{rn}^n = \dot{p}_{rn}^n$ (9)

更に図-5より $\dot{p}_{sn}^n = \sum_{j=1}^n [\dot{p}_{sj}^n r^2 + \dot{p}_{rj}^n S^2]$ (10)

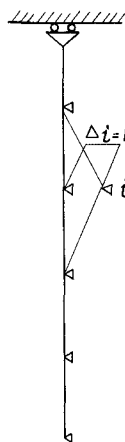


図-4

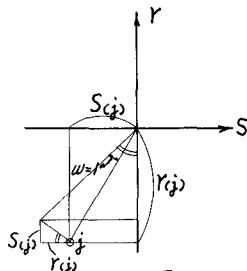


図-5

4) 回転運動方程式 構造下端に原点を持つ S 軸、 r 軸まわりのモーメント釣合か

ら、 n 本の柱を考えて次式が成立つ。

$$S \text{ 方向: } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u_{kj} \sum_{k=1}^n \dot{p}_{sj}^k (k-1) \lambda + \omega \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \dot{p}_{sn}^k (k-1) \lambda - \bar{C}_s \dot{y}_s - M y_s - \sum_{j=1}^n M u_j = 0 \quad (11)$$

$$r \text{ 方向: } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_{kj} \sum_{k=1}^n \dot{p}_{rj}^k (k-1) \lambda + \omega \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \dot{p}_{rn}^k (k-1) \lambda - \bar{C}_r \dot{y}_r - M y_r - \sum_{j=1}^n M v_j = 0 \quad (12)$$

式中、 $\bar{C}_s = \mu I_s$, $\bar{C}_r = \mu I_r$: S 及び r 方向の回転減衰定数、 $M y_s$, $M y_r$ はそれぞれ各柱の鉛直反力による r 軸、 S 軸まわりの復元モーメントで、図-1より柱配置の対称性を考慮すれば θ にかかわらず

$$M y_s = y_s [2k \{ S_{\omega}^2 + S_{\omega}^2 + S_{\omega}^2 + S_{\omega}^2 \} + y_r \{ 2k \{ S_{\omega} r_{\omega} + S_{\omega} r_{\omega} + S_{\omega} r_{\omega} + S_{\omega} r_{\omega} \} \}] \quad (13)$$

$$M y_r = y_s [2k \{ S_{\omega} r_{\omega} + S_{\omega} r_{\omega} + S_{\omega} r_{\omega} + S_{\omega} r_{\omega} \} + y_r \{ 2k \{ r_{\omega}^2 + r_{\omega}^2 + r_{\omega}^2 + r_{\omega}^2 \} \}] \quad (14)$$

と表わされるここに k : 鉛直バネ係数、 S_{ω} , r_{ω} : j 番柱から S , r 両軸までの距離(図-1参照)

さらに(11)(12)式中の $\sum_{j=1}^n M u_j$, $\sum_{j=1}^n M v_j$ は地中部の柱に働く全水平反力による S , r 方向の復元モーメントで地中部の mass の個数を n とすれば、次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ij} z_i (i-1) \lambda, \quad \sum_{j=1}^n M_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ij} z_i (i-1) \lambda \quad (15)$$

以上の(2)(3)(6)(7)(8)(10)(12)を連立微分方程式として解けばよい。本文においては弾性振動式は *modal analysis* を行い、さらに回転運動方程式と共に差分化して、1次式におとして演算を行った。

次にその解法の概略を記す。

5) 解法: (2)(3)式に(1)(4)(5)を代入し、(6)(7)(8)に(1)(9)を代入し、(11)(12)に(1)(13)(14)(15)を代入して整理すれば次式のようになる。

$$M_{ij}'' z_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \omega + C_{ij} z_k = -M_{ij}'' \ddot{u}_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 - (2) \quad M_{ij}'' z_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 + C_{ij} z_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 \quad (3)$$

$$M_{ij}'' z_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 + C_{ij} z_k = -M_{ij}'' \ddot{u}_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 - (6) \quad M_{ij}'' z_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 + C_{ij} z_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k \ddot{u}_0 \quad (7)$$

$$I \ddot{\omega} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k r_i - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k r_i + f_{ij}'' \omega - \bar{C} \omega = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k r_i - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k r_i \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_i \sum_{k=1}^n f_{ij}'' (k-1) \lambda + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k (k-1) \lambda - \bar{C} z_i - S z_i - R' z_i - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ij} z_i (i-1) \lambda = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k (k-1) \lambda \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_i \sum_{k=1}^n f_{ij}'' (k-1) \lambda - \omega \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k (k-1) \lambda - \bar{C} z_i - S z_i - R' z_i - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ij} z_i (i-1) \lambda = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij}'' z_k (k-1) \lambda \quad (12)$$

$$(j=1, 2, 3 \dots 9), (k=1, 2, 3 \dots 7-1)$$

上式中(2)(3)(6)(7)(8)は構造物の弾性振動を表わしているので、基準振動に分解して取扱う。

これらの式をMatrix表示すれば

$$M \ddot{Z} + P \dot{Z} + Q Z = -M \ddot{Z}_0 + P \dot{Z}_0 + Q Z_0 \quad (16)$$

上式中M, P, Qは行列、 $\ddot{Z}, \dot{Z}, Z, \ddot{Z}_0, \dot{Z}_0, Z_0$ は列ベクトル(各要素は断面の都合により省略)

(16)式の自由振動方程式は $|P - P M| = 0$ (17) なる行列式となり、これを解いて、 P_i^2 ($i=1, 2, 3 \dots 3(6n-5)$)なる固有値(自由振動数)とそれに対応する *modal matrix* 重 $[e_{ij}]$ が求まる。いま

$Z = \text{重} Z'$ (18) なる新たな座標系を考え、(16)式に代入し直交性の条件を用いて整理すれば(16)は結局次式のような1自由度の微分方程式となる。

$$\ddot{Z}' + \Delta Z' + \mu Z' = -\text{重} M \ddot{Z}_0 + \text{重} P \dot{Z}_0 + \text{重} Q Z_0 \quad (18)$$

上式中 Δ : P_i^2 を要素とする *diagonal matrix*, 重: 重の転置行列、(18)及(19)(12)中の時間による微分項をさらに差分化して、整理すると次の1次式を得る。

$$\text{変位式} \quad Z_i = \frac{Z + \mu \Delta t - (P_i \Delta t)^2}{1 + \mu \Delta t} Z_{i-1} - \frac{1}{1 + \mu \Delta t} Z_{i-1} + \frac{(\Delta t)^2}{1 + \mu \Delta t} (f_{ij} z_j + f_{ij} \bar{z}_j - \ddot{u}_0 \alpha_j) \quad (19)$$

$$\text{上式中} \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^{9(n-1)} e_{ij} m_i, \quad \bar{z}_j = \sum_{i=1}^{9(n-1)} e_{ij} \beta_i + e_{3(6n-5), j} \beta_{3(6n-5)}, \quad \bar{f}_j = \sum_{i=9(n-1)+2}^{18(n-1)+2} e_{ij} \beta_i + e_{3(6n-5), j} \beta_{3(6n-5)}, \quad \beta_{3(6n-5)} \quad (20)$$

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{3(6n-5)} f_{ik} z_k, \quad \beta_{3(6n-5)} = \sum_{k=1}^{9(n-1)} f_{3(6n-5), k} z_k, \quad \bar{\beta}_{3(6n-5)} = \sum_{k=9(n-1)+2}^{18(n-1)+2} f_{3(6n-5), k} z_k$$

(19)の Z_{i-1} の Suffix: (n+1) は時刻を示す。 $\mu = 2HP$, $\Delta t = 0.05$ (減衰率)

初期値接続問題として(19)(20)から Z_i が求まれば、各質点のS及びU方向変位及びねじれ角は(18)より

$$Z_s = Z_i = \sum_{r=1}^m e_{sr} Z_r \quad \{S = (j-1)(n-1) + i \leq 9n-8\}$$

$$e_{sr} = e_{ij} = \sum_{r=1}^m e_{sr} Z_r \quad \{S = 9n-8 + (j-1)(n-1) + i \leq 3(6n-5)\}, \quad \omega_{n+1} = \sum_{r=1}^m e_{sr} \ddot{Z}_r, \quad \{S = 3(6n-5)\} \quad (21)$$

(21)式から各々の弾性変位が求まれば、次式に代入して、S及びU方向の剛体回転角が計算される。

$$S \text{ 方向, } f_{ij} = \frac{\Delta t}{C_s} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ij}'' (k-1) \lambda - (1-Hr) k_{ij} (i-1) \lambda \quad \{L_i + 9 \frac{\Delta t}{C_s} f_{ij}'' (n-1) \lambda Z_n + \omega_n \frac{\Delta t}{C_s} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ij}'' (k-1) \lambda$$

$$- \left[\frac{\Delta t}{C_s} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ij}'' (k-1) \lambda + 9 \frac{\Delta t}{C_s} f_{ij}'' z_n (n-1) \lambda + \frac{\Delta t}{C_s} S - 1 \right] f_{ij} - \frac{\Delta t}{C_s} R' z_n \quad (22)$$

$$r \text{ 方向 } q_{ri} = \frac{\Delta t}{c} \sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^n \left[\sum_{l=1}^n \rho_{kl}^S (k-1)\lambda - (1-H_{ij}) R_{il}(l-1)\lambda \right] \frac{c}{\omega} i + q \frac{\Delta t}{c} \sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^n \rho_{kl}^S S_{ij} (k-1)\lambda - \left[\frac{\Delta t}{c} \sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^n \rho_{kl}^S (k-1)\lambda + q \frac{\Delta t}{c} \sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^n \rho_{kl}^S S_{ij} (k-1)\lambda + \frac{\Delta t}{c} R - 1 \right] q_{ri} - \frac{\Delta t}{c} S' q_{ri} \quad (23)$$

式の中 $H_{ij} = \begin{cases} 0: 0 \leq i \leq n \\ 1: n < i \leq n \end{cases}$, $S = 2k\{S_{ij}^S + S_{ij}^W + S_{ij}^B + S_{ij}^C\}$, $S' = 2k\{S_{ij}^S + S_{ij}^W + S_{ij}^B + S_{ij}^C\}$
 $R = 2k\{r_{ij}^S + r_{ij}^W + r_{ij}^B + r_{ij}^C\}$, $R' = 2k\{S_{ij}^S r_{ij}^S + S_{ij}^W r_{ij}^W + S_{ij}^B r_{ij}^B + S_{ij}^C r_{ij}^C\}$ (13)(14)の ρ_{kl}^S , ρ_{kl}^W の係数である。

6) 計算例 図に示す9本柱を39自由度系として計算を行う

ト。モデル諸元は図-6に示す。柱の剛度 $EI = 1.29154 \times 10^{16} \text{ kg cm}^2$

土のポアソン比 $\nu = 0.25$, 土のヤング率 $E = 4.5 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$

土のバネ定数は海底地盤の傾斜を考慮して算出した。

$$p_{e1} = p_{e1} = p_{e1} = 2.376035 \times 10^7 \text{ kg/cm}, p_{e2} = p_{e2} = p_{e2} = 3.984375 \times 10^{6.5} \text{ kg/cm}$$

$$p_{e1} = p_{e1} = p_{e1} = \text{ ", } p_{e2} = p_{e2} = p_{e2} = 1.1015625 \times 10^7 \text{ kg/cm}$$

$$p_{e1} = p_{e1} = p_{e1} = \text{ ", } p_{e2} = p_{e2} = p_{e2} = 1.8046875 \times 10^7 \text{ kg/cm}$$

lumped mass の質量 m_i は、附着土重量をも考慮して算出した。

$$m_1 = m_1 = m_1 = 1.25567 \times 10^4 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}, m_2 = m_2 = m_2 = 1.07604 \times 10^4 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}$$

$$m_1 = m_1 = m_1 = \text{ ", } m_2 = m_2 = m_2 = 1.33083 \times 10^4 \text{ kg}$$

$$m_1 = m_1 = m_1 = \text{ ", } m_2 = m_2 = m_2 = 1.58561 \times 10^4 \text{ kg}$$

地震波は ELCENTRO-NS, 300gal, 時間間隔 $\Delta t = 1/200 \text{ sec}$

減衰率 $\nu = 0.05$, なお地震作用方向は $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の3 case である。

7) 考察 おおむね振動を考慮した場合としない場合を比較して

みると、地震波の入射角の如何に拘らず変位量, 周期等には大差

はない。本例に於いては立体構造として信頼すべき安全性を有する。

解の収束, 断面力等については講演時機会があれば提示したい。

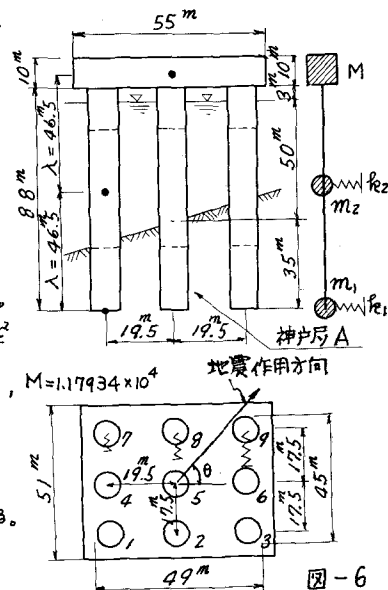


図-6

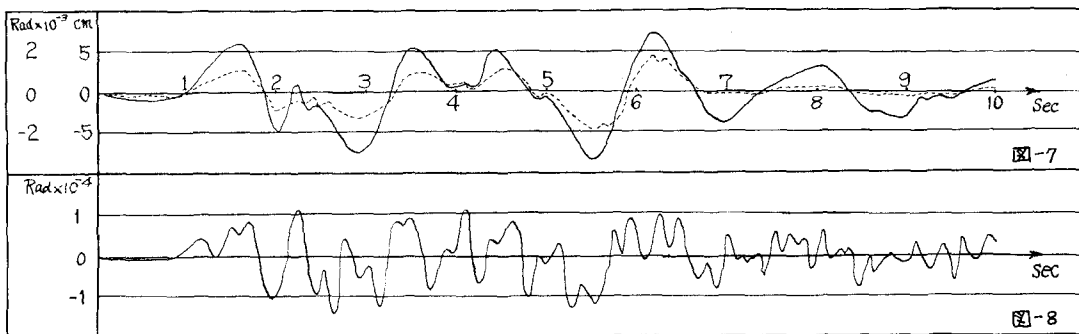


図-7

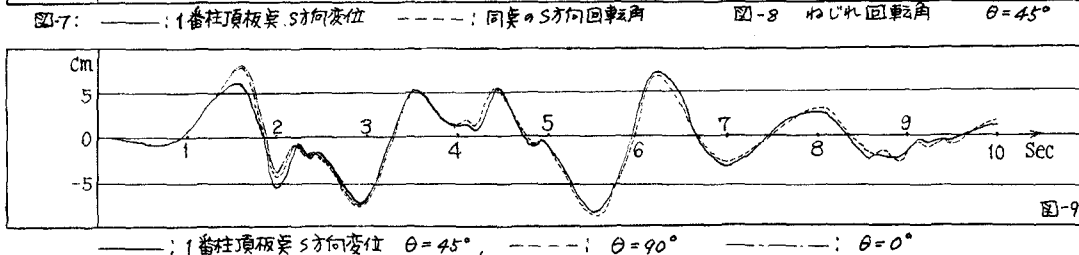


図-8

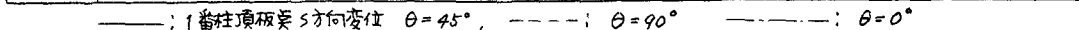


図-9