

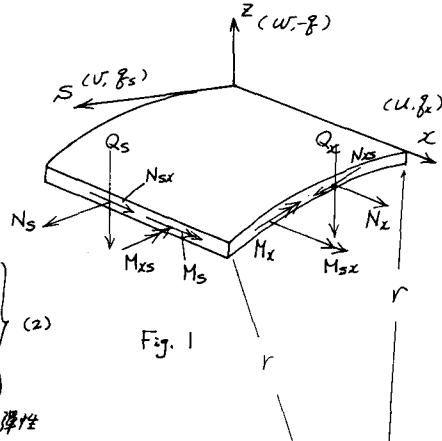
岐阜大学 工学部 正 眞 の井上 肇
 " " 正 眞 時実 公生

複雑な境界条件をもつ ツエルの解析については、近似計算に頼らざるを得ない。最近、その手段として有限要素法がストリックス法に立脚して、ツエル等の構造物の解析に多く用いられているが、そこで扱うべき未知量の数は相対的に大きくなる。ここでは、変位だけを未知量とする階差法によって、有限要素法の時よりも、すくなく未知数によって、ツエルの自由振動の近似解と、行列計算の手法を用いて求めようとするものである。対象とした ツエルは Non-circular の Cylindrical ツエルとし、ツエル厚さはその曲線方向にのみ変化しているものとして扱った。

運動方程式とその階差表示

Fig. 1 のように 座標系と断面力等をとると、ツエルの要素の釣り合い条件式は、つぎのようになる。¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + \delta_x &= \rho h \ddot{u} \\ \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \delta_s &= \rho h \ddot{v} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - \frac{N_x}{r} - \delta &= \rho h \ddot{w} \end{aligned} \right\} (1)$$



変位と断面力との間にはつぎの関係がある。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{w}{r} \right), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ N_s &= K \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), & M_s &= -D \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ N_{xs} &= N_{sx} = G h \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & M_{xs} &= M_{sx} = -G \frac{r}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで $K = E h / (1 - \nu^2)$, $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$, E : 弾性係数, G : せん断弾性係数, ν : Poisson 比, h : ツエルの厚さ, ρ : ツエルの単位体積あたりの質量

通常の階差式表現にしたがって、(1)と(2)は

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\lambda} C_3, & \frac{1}{2\mu} C_4 \\ \frac{1}{2\lambda} C_5, & \frac{1}{2\mu} C_3 \\ -\frac{1}{r} C_2, & \frac{1}{\lambda} C_2, & \frac{1}{2\lambda\mu} C_6, & \frac{1}{\mu^2} C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_{xs} \\ N_s \\ M_x \\ M_{xs} \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_x \\ -\delta_s \\ \delta \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} h \ddot{u} \\ h \ddot{v} \\ r \ddot{w} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_{xs} \\ N_s \\ M_x \\ M_{xs} \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ G h \\ K \\ -D \\ -G \frac{r}{2} \\ -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\lambda} C_3, & \frac{\nu}{2\mu} C_3, & \frac{\nu}{r} C_2 \\ \frac{1}{2\lambda} C_5, & \frac{1}{2\lambda} C_3, & \\ \frac{\nu}{2\lambda} C_3, & \frac{1}{2\mu} C_3, & \frac{1}{r} C_2 \\ \frac{1}{\lambda} C_1, & \frac{\nu}{\mu} C_1, & \\ \frac{1}{\lambda} C_1, & \frac{1}{\mu^2} C_1, & \frac{1}{2\lambda\mu} C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

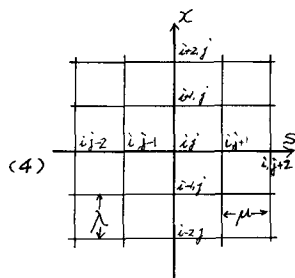


Fig. 2

$$\therefore \text{て } C_1 = [1, -2, 1], C_2 = [0, 1, 0], C_3 = [-1, 0, 1], C_4 = [-1, 1, 0, 0, 0], C_5 = [0, 0, 0, -1, 1], C_6 = C_4 - C_5$$

$$\begin{aligned} \overline{N}_{x,ij} &= \{N_{x,ij}, N_{x,ij}, N_{x,ij}\}, \overline{N}_{xs,ij} = \{N_{x,ij}, N_{x,ij}, N_{x,ij}, N_{x,ij}, N_{x,ij}, N_{x,ij}\}, \overline{N}_{s,ij} = \{N_{s,ij}, N_{s,ij}, N_{s,ij}\} \\ \overline{M}_{x,ij} &= \{M_{x,ij}, M_{x,ij}, M_{x,ij}\}, \overline{M}_{xs,ij} = \{M_{x,ij}, M_{x,ij}, M_{x,ij}, M_{x,ij}, M_{x,ij}, M_{x,ij}\}, \overline{M}_{s,ij} = \{M_{s,ij}, M_{s,ij}, M_{s,ij}\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{ij} &= \{U_{i,j}, U_{i,j}, U_{i,j}\}, \overline{U}_{ij}^* = \{U_{i,j}, U_{i,j}, U_{i,j}\}, \overline{U}_{ij} = \{U_{i,j}, U_{i,j}, U_{i,j}\}, \overline{U}_{ij}^* = \{U_{i,j}, U_{i,j}, U_{i,j}\} \\ \overline{W}_{ij} &= \{W_{i,j}, W_{i,j}, W_{i,j}\}, \overline{W}_{ij}^* = \{W_{i,j}, W_{i,j}, W_{i,j}\}, \overline{W}_{ij} = \{W_{i,j}, W_{i,j}, W_{i,j}\} \end{aligned} \quad (6)$$

(3)の未知量の項を(4)を用いて表位で表現すれば

$$\begin{pmatrix} \overline{N}_x \\ \overline{N}_{xs} \\ \overline{N}_s \\ \overline{M}_x \\ \overline{M}_{xs} \\ \overline{M}_s \end{pmatrix}_{ij} = \frac{K_0}{\lambda^2 \mu^2} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \\ & L_{43} & \\ & L_{53} & \\ & L_{63} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}_{ij} \quad (7)$$

とする。こゝで $K_0 = E h_0 / (1 - \nu^2)$, h_0 : 基準となるシェルの厚さ

$$U = \{U_{i,j-2}, U_{i,j-1}, U_{i,j}, U_{i,j+1}, U_{i,j+2}, U_{i,j}, U_{i,j}, U_{i,j}, U_{i,j+1}, U_{i,j+2}, U_{i,j+1}, U_{i,j+2}, U_{i,j+2}\}$$

$$V = \{V_{i,j-2}, V_{i,j-1}, V_{i,j}, V_{i,j+1}, V_{i,j+2}, V_{i,j}, V_{i,j}, V_{i,j}, V_{i,j+1}, V_{i,j+2}, V_{i,j+1}, V_{i,j+2}, V_{i,j+2}\}$$

$$W = \{W_{i,j-2}, W_{i,j-1}, W_{i,j}, W_{i,j+1}, W_{i,j+2}, W_{i,j}, W_{i,j}, W_{i,j}, W_{i,j+1}, W_{i,j+2}, W_{i,j+1}, W_{i,j+2}, W_{i,j+2}\}$$

L_{11} etc. Matrix と

これを(3)に代入すれば、(3)の運動方程式の階差表となる。

$$\frac{K_0}{\lambda^2 \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} -g_x \\ -g_s \\ g \end{pmatrix}_{ij} + \rho \begin{pmatrix} R \ddot{U} \\ R \ddot{V} \\ R \ddot{W} \end{pmatrix}_{ij} \quad (8)$$

$$\therefore \text{て } N_{11} = \frac{1}{2\lambda} C_3 L_{11} + \frac{1}{2\mu} C_4 L_{21}, N_{21} = \frac{1}{2\lambda} C_5 L_{21} + \frac{1}{2\mu} C_3 L_{31} \text{ etc.}$$

一般に、階差法によるとき、すくなくとも未知量で、高精度の結果を得るためには、高精度階差式(λ, μ について 4 或 6 次の項までを用いた)を用いる方がよいのは当然であるが、こゝでは、表位の簡便化を図るため普通精度のもの(λ, μ の 2 次の項まで)を用いた。(8)によってシェルの全体 stiffness Matrix を作成し(境界条件と考慮して)、 $g_x = g_s = g = 0$ とすれば、運動方程式(こゝでは振動数方程式)が得られる。

計算例については、1) 円筒形 2) 放物線形の部分シェルについて計算した。当日にゆづる。

1) Kraus, H.; Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, 1967, p. 200

2) 井上, 時実; 曲率および断面が一定でない円筒の自由振動, 工学会第 23 回年次技術講演会, 昭 43, I-143

3) Mah, Bordon B.; Numerical Analysis of Non-circular Cylindrical Shells, Proc. ASCE, Vol. 93, EH3, 1967

4) 佐竹; 梁の高精度差方式とその応用, 日本鋼構造協会第 3 回大会研究発表, トリックス構造解析新技術発表, 昭 44