

九州大学 工学部 正 員 山崎徳也

学生員 金子忠男

1. 緒 言

板には、矩形、平行四辺形、台形、三角形、円形、扇形など種々の形状があり、そのうち矩形板や円形板に関する振動解析は古くから多くの人々により行なわれており、枚挙にいとまがない。しかし、扇形板に関しては著者らの知る限り、R. A. Westmann⁽¹⁾および著者らの研究があるに過ぎず、しかもこれらはいずれも一径間の扇形板についての報告であり、連続扇形板に関する研究は未に見受けられない。本研究は、道路橋や鉄道橋の曲線部に多見される直線辺が橋台や橋脚で単純支持され、中間に円弧状の支承で支持される連続扇形板を対象とし、その自由振動問題の解法を提示し、あわせて扇形板の振動特性を明らかにせんとするものである。なお、本題の扇形板は等方性で、薄板理論も適用しうるものとする。

2. 解 法

(1)基礎微分方程式 図-1(a)に示すごとく、点Oを中心とし半径がそれぞれ r_0 , r_m なる同心円弧AB, CDと中心Oを通り互いに角度 α (rad.)の開きをもつ直線AC, BDとで囲まれる扇形板ABDCを考え、板の中立面上に中心Oを原点とする円筒座標(r, θ, z)を導入する。

扇形板ABDCは直線辺AC, BDで単純支持され、円弧辺AB, CDで任意支持されるとともに中間で円弧状の支承1, 2, ..., $m-1$ により単純支持されるものとし、中心Oから各中間支承までの距離を $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$ とする。かかるとき、これらの中間支承で分割される単位扇形板に円弧辺AB側より順次1, 2, ..., m なる番号を付し、第 i 番目の単位扇形板(以下単に扇形板 i と称する)を取り出せば(図-1(b)参照)、次のごとく自由振動の微分方程式が成立する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w_i + \frac{\rho_i h_i}{D_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

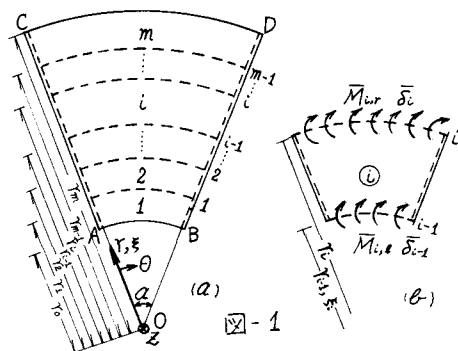
ここに、 w_i ; 扇形板 i のZ軸方向のたわみ、 ρ_i ; 扇形板 i の板密度、 h_i ; 扇形板 i の板厚、 $D_i = E_i h_i^3 / [12(1 - \mu_i^2)]$; 扇形板 i の板剛度、 E_i ; 扇形板 i の弾性係数、 μ_i ; 扇形板 i のポアソン比、 t ; 時間。

式(1)は、中心Oから扇形板 i の節線 i までの距離 r_i を規準長さにとれば、次のごとく無次元表示される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w_i + \frac{\rho_i h_i}{D_i} r_i^4 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\xi = r/r_i$ 。

式(2)はその一般解を ξ, θ, t の変数分離形で仮定すれば、 ξ についてのBeavelおよび変形Beavelの微分方程式に分解される。したがって、一般解 w_i は次式で与えられることとなる。



$$W_i = W_i(\xi, \theta) \cos \omega t = \{A_i J_{a_n}(\rho_i \xi) + B_i Y_{a_n}(\rho_i \xi) + C_i I_{a_n}(\rho_i \xi) + D_i K_{a_n}(\rho_i \xi)\} \sin a_n \theta \cos \omega t \quad (3)$$

ここに、 $J_{a_n}(\rho_i \xi)$, $Y_{a_n}(\rho_i \xi)$; a_n 次の第1種および第2種 Bessel 関数,

$I_{a_n}(\rho_i \xi)$, $K_{a_n}(\rho_i \xi)$; a_n 次の変形された第1種および第2種の Bessel 関数,

$$\rho_i = \gamma_i \sqrt{\frac{\rho_i \rho_i}{D_i} \omega^2}, \quad a_n = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n=1, 2, \dots, \quad \omega; \text{扇形板の固有円振動数},$$

A_i, B_i, C_i, D_i ; 積分定数.

式(3)に含まれる4つの積分定数 $A_i \sim D_i$ は扇形板 i の円弧辺の境界条件により決定される。いま、扇形板 i の節線 $i-1$ および i において、端モーメント $\overline{M}_{i,l}$, $\overline{M}_{i,r}$ が作用し、支承沈下 $\overline{\delta}_{i-1}$, $\overline{\delta}_i$ が生ずるものとすれば、これらはいずれも時間 t の関数で与えられ、次式のごとく仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \overline{M}_{i,l} &= M_{i,l} \sin a_n \theta \cos \omega t, & \overline{\delta}_{i-1} &= \delta_{i-1} \sin a_n \theta \cos \omega t, \\ \overline{M}_{i,r} &= M_{i,r} \sin a_n \theta \cos \omega t, & \overline{\delta}_i &= \delta_i \sin a_n \theta \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $M_{i,l}$, $M_{i,r}$, δ_{i-1} , δ_i は任意定数。

よって、積分定数 $A_i \sim D_i$ を決定するための境界条件式を次のごとく表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \xi = \xi_i \text{ で}, & \quad W_i = \delta_{i-1} \sin a_n \theta, \quad -D_i \left\{ \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \nu_i \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W_i}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) \right\} = M_{i,l} \sin a_n \theta, \\ \xi = 1 \text{ で}, & \quad W_i = \delta_i \sin a_n \theta, \quad -D_i \left\{ \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \nu_i \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W_i}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) \right\} = -M_{i,r} \sin a_n \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $\xi_i = \gamma_{i-1} / \gamma_i$ 。

式(5)に式(3)の規準関数 $W_i(\xi, \theta)$ を代入し得られる連立方程式を解けば、未知積分定数 $A_i \sim D_i$ の結局、次のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \left[\frac{1}{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \left\{ Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{F}_i + I_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \Delta_i - K_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \Lambda_i \right\} - \frac{Y_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\overline{G}_i} \right] \delta_i + \left[\frac{1}{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \left\{ Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{\Phi}_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \Psi_i + K_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \Omega_i \right\} + \frac{1}{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)} + \frac{Y_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\overline{G}_i} \cdot \frac{J_{a_n}(\rho_i)}{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)} \right] \delta_{i-1} + \frac{1}{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \left\{ -Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{F}_i \right. \\ &\quad \left. + I_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{G}_i - K_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{L}_i \right\} \frac{M_{i,r}}{D_i} + \frac{1}{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \left\{ -Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{F}_i + I_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{G}_i - K_{a_n}(\rho_i \xi_i) \cdot \overline{L}_i \right\} \frac{M_{i,l}}{D_i}, \\ B_i &= \left[-\frac{\overline{F}_i}{H_i} + \frac{Y_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\overline{G}_i} \right] \delta_i - \left\{ \frac{\overline{\Phi}_i}{H_i} + \frac{J_{a_n}(\rho_i)}{\overline{G}_i} \right\} \delta_{i-1} + \frac{\overline{F}_i}{H_i} \frac{M_{i,r}}{D_i} + \frac{\overline{F}_i}{H_i} \frac{M_{i,l}}{D_i}, \\ C_i &= -\frac{\Delta_i}{H_i} \delta_i + \frac{\Psi_i}{H_i} \delta_{i-1} - \frac{\overline{G}_i}{H_i} \frac{M_{i,r}}{D_i} - \frac{\overline{G}_i}{H_i} \frac{M_{i,l}}{D_i}, \quad D_i = \frac{\Lambda_i}{H_i} \delta_i - \frac{\Omega_i}{H_i} \delta_{i-1} + \frac{\overline{L}_i}{H_i} \frac{M_{i,r}}{D_i} + \frac{\overline{L}_i}{H_i} \frac{M_{i,l}}{D_i}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad \overline{F}_i &= (\overline{C}_i \Delta_i + \overline{d}_i \Lambda_i), \quad \Delta_i = \overline{f}_i p_i - \overline{f}_i \overline{p}_i, \quad \Lambda_i = \overline{f}_i j_i - \overline{f}_i \overline{j}_i, \quad \overline{\Phi}_i = (\overline{C}_i \Psi_i - \overline{d}_i \Omega_i), \\ \Psi_i &= \overline{h}_i' p_i - \overline{g}_i \overline{p}_i, \quad \Omega_i = \overline{h}_i' j_i - \overline{g}_i \overline{j}_i, \quad \overline{F}_i = \overline{h}_i' (\overline{C}_i p_i - \overline{d}_i j_i) / \overline{G}_i, \quad \overline{F}_i = \overline{h}_i' (\overline{C}_i \overline{p}_i - \overline{d}_i \overline{j}_i) / \overline{G}_i, \\ \overline{G}_i &= \overline{h}_i' p_i, \quad \overline{G}_i = \overline{h}_i' \overline{p}_i, \quad \overline{L}_i = \overline{h}_i' j_i, \quad \overline{L}_i = \overline{h}_i' \overline{j}_i, \quad \overline{f}_i = \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i \xi_i), \quad \overline{g}_i = \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i), \\ \overline{h}_i' &= \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i), \quad \overline{f}_i = \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i), \quad \overline{h}_i = \overline{G}_i J_{a_n}(\rho_i), \quad j_i = \overline{G}_i \overline{C}_i - \overline{G}_i C_i, \quad p_i = \overline{G}_i \overline{d}_i - \overline{G}_i d_i, \\ \overline{j}_i &= \overline{G}_i \overline{C}_i - \overline{G}_i C_i, \quad \overline{\overline{d}}_i = \overline{G}_i \overline{d}_i - \overline{G}_i d_i, \quad \overline{G}_i = Y_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) J_{a_n}(\rho_i), \\ \overline{G}_i' &= Y_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i) - Y_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i), \quad \overline{G}_i = Y_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) J_{a_n}(\rho_i), \quad C_i = I_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - I_{a_n}(\rho_i \xi_i) J_{a_n}(\rho_i), \\ C_i' &= I_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i) - I_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i), \quad \overline{C}_i = I_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - I_{a_n}(\rho_i \xi_i) J_{a_n}(\rho_i), \quad d_i = K_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - K_{a_n}(\rho_i \xi_i) J_{a_n}(\rho_i), \\ d_i' &= K_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i) - K_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i), \quad \overline{d}_i = K_{a_n}(\rho_i) J_{a_n}(\rho_i \xi_i) - K_{a_n}(\rho_i \xi_i) J_{a_n}(\rho_i), \\ J_{a_n}(\rho_i \xi_i) &= \rho_i^2 \left\{ \left[\frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} \frac{J_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\xi_i^2} - 1 \right] J_{a_n}(\rho_i \xi_i) + \frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} J_{a_n+1}(\rho_i \xi_i) \right\}, \quad Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) = \rho_i^2 \left\{ \left[\frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} \frac{Y_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\xi_i^2} - 1 \right] Y_{a_n}(\rho_i \xi_i) + \frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} Y_{a_n+1}(\rho_i \xi_i) \right\}, \\ I_{a_n}(\rho_i \xi_i) &= \rho_i^2 \left\{ \left[\frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} \frac{I_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\xi_i^2} + 1 \right] I_{a_n}(\rho_i \xi_i) - \frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} I_{a_n+1}(\rho_i \xi_i) \right\}, \quad K_{a_n}(\rho_i \xi_i) = \rho_i^2 \left\{ \left[\frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} \frac{K_{a_n}(\rho_i \xi_i)}{\xi_i^2} + 1 \right] K_{a_n}(\rho_i \xi_i) + \frac{(1-\nu)}{\rho_i^2 \xi_i^2} K_{a_n+1}(\rho_i \xi_i) \right\}. \end{aligned}$$

(2) ねみ角一端モーメント関係式の誘導

図-1(a)に示す扇形板 i の節線 $i-1$ および i におけるねみ角をそれぞれ $\overline{f}_{i-1}$, $\overline{f}_i$ とする。このとき、 $\overline{f}_{i-1}$, $\overline{f}_i$ の関数形状は式(4)と全く同様に次のごとく仮定する。

$$\overline{f}_{i-1} = f_{i-1} \sin a_n \theta \cos \omega t, \quad \overline{f}_i = f_i \sin a_n \theta \cos \omega t. \quad (\text{ここに、} f_{i-1}, f_i \text{ は任意定数}) \quad (7)$$

他方、式(3)に関して変数 ξ の一次微係数を求め、その結果に節線の座標値 ξ_i および1を代入すれば、扇形板 i 上の節線 $i-1$, i におけるたわみ角が求められるゆえ、これらと式(7)とを等置することにより、次のごとき関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Y}_{i-1} &= \left\{ \mathcal{S}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \mathcal{D}_{i-1} + \left\{ \mathcal{L}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \mathcal{D}_i + \left\{ \mathcal{U}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \frac{M_{i,\ell}}{D_i} + \left\{ \mathcal{V}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{V}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \frac{M_{i,r}}{D_i}, \\ \mathcal{Y}_i &= \left\{ \mathcal{S}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \mathcal{D}_{i-1} + \left\{ \mathcal{L}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \mathcal{D}_i + \left\{ \mathcal{U}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \frac{M_{i,\ell}}{D_i} + \left\{ \mathcal{V}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{V}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \frac{M_{i,r}}{D_i}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 $\mathcal{S}_i = \frac{1}{J_{\alpha_i}(\xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \{ Y_{\alpha_i}(\xi_i) \cdot \Phi_i - \mathcal{I}_{\alpha_i}(\xi_i) \Psi_i + K_{\alpha_i}(\xi_i) \mathcal{D}_i \} + \frac{1}{J_{\alpha_i}(\xi_i)} + \frac{Y_{\alpha_i}(\xi_i)}{\mathcal{S}_i} \cdot \frac{J_{\alpha_i}(\xi_i)}{J_{\alpha_i}(\xi_i)}$,
 $\mathcal{S}_i' = -\frac{\Phi_i}{H_i} - \frac{J_{\alpha_i}(\xi_i)}{\mathcal{S}_i}$, $\mathcal{S}_i = -\frac{\Psi_i}{H_i}$, $\mathcal{S}_i' = -\frac{\mathcal{D}_i}{H_i}$, $\mathcal{L}_i = \frac{1}{J_{\alpha_i}(\xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \{ Y_{\alpha_i}(\xi_i) \Gamma_i + \mathcal{I}_{\alpha_i}(\xi_i) \Delta_i - K_{\alpha_i}(\xi_i) \mathcal{L}_i \} - \frac{Y_{\alpha_i}(\xi_i)}{\mathcal{S}_i}$, $\mathcal{L}_i' = -\frac{\Gamma_i}{H_i} + \frac{J_{\alpha_i}(\xi_i)}{\mathcal{S}_i}$, $\mathcal{L}_i = -\frac{\Delta_i}{H_i}$, $\mathcal{L}_i' = \frac{\mathcal{L}_i}{H_i}$,
 $\mathcal{U}_i = \frac{1}{J_{\alpha_i}(\xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \{ -Y_{\alpha_i}(\xi_i) \bar{F}_i + \mathcal{I}_{\alpha_i}(\xi_i) \bar{G}_i - K_{\alpha_i}(\xi_i) \bar{L}_i \}$, $\mathcal{U}_i' = \frac{\bar{F}_i}{H_i}$, $\mathcal{U}_i = -\frac{\bar{G}_i}{H_i}$, $\mathcal{U}_i' = \frac{\bar{L}_i}{H_i}$,
 $\mathcal{V}_i = \frac{1}{J_{\alpha_i}(\xi_i)} \cdot \frac{1}{H_i} \{ -Y_{\alpha_i}(\xi_i) F_i + \mathcal{I}_{\alpha_i}(\xi_i) G_i - K_{\alpha_i}(\xi_i) L_i \}$, $\mathcal{V}_i' = \frac{F_i}{H_i}$, $\mathcal{V}_i = -\frac{G_i}{H_i}$, $\mathcal{V}_i' = \frac{L_i}{H_i}$.
 J_{α_i} , Y_{α_i} , $\mathcal{I}_{\alpha_i}$, K_{α_i} はそれぞれ Bessel 関数の変数 ξ に関する一次微係数。

式(8)ははり理論における振動たわみ角式のごとくたわみ角と端モーメントとの直接の関係をあらわすものではなく、たわみ角および端モーメント式の各係数間において成立すべき関係式であり、特にたわみ角—端モーメント関係式と名付ける。

(3) 節線方程式および連続条件式

扇形板 $i+1$ と扇形板 i とが互いに隣接する節線 i 上における節線方程式は次式のごとくである。

$$M_{i,r} + M_{i+1,\ell} = 0 \quad (9)$$

また、節線 i において扇形板 $i+1$ と i とのたわみ角が連続することより、式(8)を用いて次のごとき連続条件式が得られる。

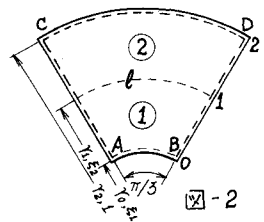
$$\begin{aligned} &\left\{ \mathcal{S}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{S}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \mathcal{D}_{i-1} + \left\{ \mathcal{L}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{L}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \mathcal{D}_i + \left\{ \mathcal{U}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{U}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{U}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \frac{M_{i,\ell}}{D_i} + \left\{ \mathcal{V}_i J_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i' Y_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\xi_i) + \mathcal{V}_i' K_{\alpha_i}'(\xi_i) \right\} \frac{M_{i,r}}{D_i} = \left\{ \mathcal{S}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{S}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{S}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{S}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right\} \mathcal{D}_i + \left\{ \mathcal{L}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{L}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{L}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right\} \mathcal{D}_{i+1} + \left\{ \mathcal{U}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{U}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{U}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{U}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right\} \frac{M_{i+1,\ell}}{D_{i+1}} + \left\{ \mathcal{V}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{V}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{V}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) + \mathcal{V}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\xi_{i+1}) \right\} \frac{M_{i+1,r}}{D_{i+1}}. \end{aligned}$$

上式に式(9)を代入し、さらに扇形板 i の固有値 λ_i および板剛度 D_i と扇形板 m のそれらとの比をそれぞれ χ_i , λ_i とすれば、結局、次のごとき結果が得られる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \mathcal{S}_i J_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{S}_i' Y_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{S}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{S}_i' K_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) \right\} \mathcal{D}_{i-1} + \left\{ \mathcal{L}_i J_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{L}_i' Y_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{L}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}_i' K_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) \right\} \mathcal{D}_i - \left\{ \mathcal{S}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{S}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{S}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{S}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) \right\} \mathcal{D}_i - \left\{ \mathcal{L}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{L}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{L}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) \right\} \mathcal{D}_{i+1} + \left[\frac{1}{\chi_i} \left\{ \mathcal{U}_i J_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{U}_i' Y_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{U}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{U}_i' K_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) \right\} \frac{M_{i,\ell}}{D_m} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \mathcal{V}_i J_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{V}_i' Y_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{V}_i \mathcal{I}_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) + \mathcal{V}_i' K_{\alpha_i}'(\lambda_i \ell_m) \right\} \frac{M_{i,r}}{D_m} \right] \\ &- \chi_{i+1} \left\{ \mathcal{U}_{i+1} J_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{U}_{i+1}' Y_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{U}_{i+1} \mathcal{I}_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) + \mathcal{U}_{i+1}' K_{\alpha_{i+1}}'(\lambda_{i+1} \ell_m \xi_{i+1}) \right\} \frac{M_{i+1,\ell}}{D_m} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $\chi_i = D_i/D_m$, $\lambda_i = \ell_i/\ell_m$, $M_{i,r} = -M_{i+1,\ell} = M_i$.

したがって、本題の連続扇形板 $ABDC$ の振動方程式は節線上で得られる $(m-1)$ 個の連続条件式と円弧辺 AB, CD での 2 境界条件式とからなる $(m+1)$ 個の連立方程式において、未知数 M_i/D_m の係数の行列式を 0 とおくことにより得られ、これを満足する固有値群を求めることにより、連続扇形板の固有振動数が算定されることとなる。



3. 計算例 図-2 に示すごとく、扇形板 $ABDC$ が四辺 AB, CD, AC, BD で単純支持される、かつ中間に 1 つの内弧支承で単純支持されるものとする。いま、支承流下がないものとするれば、 $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0$ であり、また、扇形板 1, 2 において板剛度、板厚、板材が等しいとすれば、 $D_1 = D_2$ 、 $k_1 = \lambda_1 k_2 = \lambda_1 \lambda_2 k_2 = \xi_2 k_2$ 、 $\lambda_2 = 1$ 、 $\lambda_1 = 1$ とするゆえ、連続条件式 (10) は次の内容となる。

$$-\xi_2 \{U_1 J_n(\xi_2 k_2) + U_1' Y_n(\xi_2 k_2) + \bar{U}_1 I_n(\xi_2 k_2) + \bar{U}_1' K_n(\xi_2 k_2)\} \frac{M_0}{D_2} + [\xi_2 \{V_1 J_n(\xi_2 k_2) + V_1' Y_n(\xi_2 k_2) + \bar{V}_1 I_n(\xi_2 k_2) + \bar{V}_1' K_n(\xi_2 k_2)\} + \{U_2 J_n(\xi_2 k_2) + U_2' Y_n(\xi_2 k_2) + \bar{U}_2 I_n(\xi_2 k_2) + \bar{U}_2' K_n(\xi_2 k_2)\}] \frac{M_1}{D_2} - \{V_2 J_n(\xi_2 k_2) + V_2' Y_n(\xi_2 k_2) + \bar{V}_2 I_n(\xi_2 k_2) + \bar{V}_2' K_n(\xi_2 k_2)\} \frac{M_2}{D_2} = 0 \quad (11)$$

円弧辺 AB, CD の単純支持条件より、 $M_0 = M_2 = 0$ が得られ、これらと式 (11) とから本例の振動方程式が次のごとく与えられる。

$$(V_1 \xi_2 + U_2) J_n(\xi_2 k_2) + (V_1' \xi_2 + U_2') Y_n(\xi_2 k_2) + (\bar{V}_1 \xi_2 + \bar{U}_2) I_n(\xi_2 k_2) + (\bar{V}_1' \xi_2 + \bar{U}_2') K_n(\xi_2 k_2) = 0 \quad (12)$$

式 (12) において、 $\alpha = \pi/3$ 、 $n = 1$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $\xi_2 = 0.65634$ 、 $\xi_1 = 0.31268$ のときの固有値 k_2 を求めれば、表-1 のごとく算出される。式 (12) の左辺は k_2 の関数と見做したとき、連続関数とはならず、図-3 に示すごとく不連続点を有する。さらに、 $k_2 = 10.19186$ に対する振動モードをえがけば図-4 のごとくである。また図-2 において円弧支承 1 を辺 AB より CD まで移動させる時の k_2 の変化をプロットすれば図-5 の結果を得る。図より明らかなごとく、 $k_{2 \max}$ は扇形板の幅の中央より CD 側にすれ、ほぼ $\lambda_1 = 0.725 \lambda_2$ の近傍に生ずる。

表 - 1

	k_2	$\omega \left(\frac{\pi^2 D}{\rho h^3} \right)$
$n=1$	10.19186	4.97190
	12.68020	7.69604

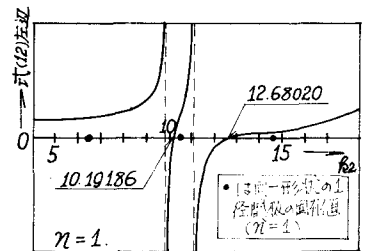


図-3

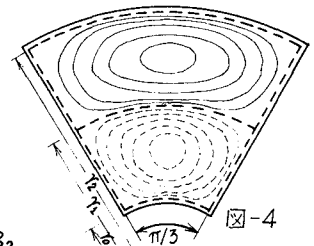


図-4

4. 結語 本題にあられる Bessel 関数は k_2 を変数とする無限級数収束で与えられるゆえ、その数値解は収束計算によるが、収束は変数 k_2 が 10 以下のときは極めて早く、わずか 15~20 項で有効数字 6 桁まで求める。また、 k_2 が 10 を越えると一般に慣用されている漸近級数を用いても厳密値との誤差は僅少であり、本題の数値計算にもこれを適用した。 k_2 が 20 に達すると収束が非常におそく、計算に必要な有効数字を取ることが困難となるが、このことに関しましてはプログラム作成上特に留意し、より大型の電算機による倍精度演算が必要である。

参考文献

- (1) R.A. Westmann "A Note on Free Vibration of Triangular and Sector Plates" *Journal of the Aerospace Science* 1962
- (2) 山崎 稔 木 金子 "扇形板の自由振動解析" 昭和 43 年度土木学会西部支部研究発表会論文集、昭和 44 年 2 月。

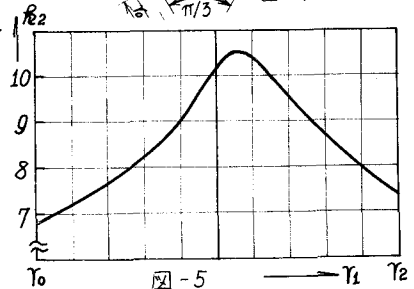


図-5