

熊本大学 正会員 吉村 虎蔵
同 学生員 〇有 吉和夫
熊本県庁 松原 茂

図-1の形式のランガー橋は中径間橋としてしばしば採用される形式である。ここではこれをランガーゲルバー橋と呼ぶ。この形式の固有値の解析については、集中質量法による外は、特殊な解析法は見ないようである。したが、て従来平井一男教授や筆者の一人吉村が提案した結合法⁽¹⁾による解析法をここで報告する。結合法で解くにあたっては、図-2～5等の橋梁と関連して問題を取扱うのボーの考え方であろう。このような観点からのランガーゲルバー橋の固有値の解析について主として述べ、他の一つの方法についてはここでは簡単な記述にとどめる。解析のための仮定は次の3点である。(1) 桁部は定断面である。(2) 構造は左右対称である。(3) アーチは定断面でかつ軸線は放物線である。

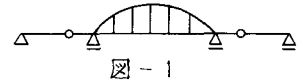


図-1

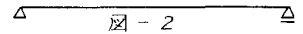


図-2

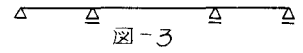


図-3

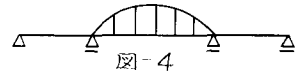


図-4

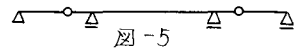


図-5

A. 理論

後の比較のために、解析の理解を容易にするために、まず図-3を、次に図-4を、最後に図-1の固有値の解析法について記す。図-5については注(2)においてすでに発表されている。

(1) 図-3の構造の固有値

これの振動数方程式を導くにあたっては図-6に示すように図-2の単純ばりに、支点反力に代わって、 $P_1 \sin \omega t$, $P_2 \sin \omega t$ の集中周期力をかけ、中間支点でたわみ $w=0$ という条件から振動数方程式が得られる。単純梁に集中周期力が働くときの運動方程式は周知のように

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = \sum_i \bar{\varphi}_n(x=x_i) \cdot \bar{\varphi}_n(x=x_i) \cdot P_i \sin \omega t \quad (1)$$

ω_n , $\bar{\varphi}_n$ はそれぞれ単純梁の n 次の固有値と正規化モード、 w_n は n 次の振動によるたわみ、 x_i はたわみの測定点、 x_j は荷重点の座標。ゆえにこのときのたわみは

$$w = \sum_n \sum_i \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \bar{\varphi}_n(x=x_i) \cdot \bar{\varphi}_n(x=x_j) \cdot P_i \sin \omega t \quad (2)$$

(i). 対称振動の振動数方程式は式(2)において、 $n=1,3,5,\dots$, $P_1=P_2$,

$w(x=x_1)=0$, を考慮すると得られる。すなわち

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \sin^2(n\pi \frac{x_1}{L}) = 0$$

ここに、 $\lambda = \omega/\omega_1$, $\omega_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$,

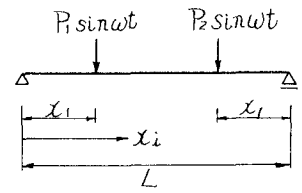


図-6

(ii). 反対称振動の振動数方程式は、式(2)において、 $n=2,4,6,\dots$, $w(x=x_1)=0$, $P_1=-P_2$, を考慮する。結果は式(3)と同じであるが、 n が奇数であるか、偶数であるかが異なる。

(iii). 振動モードは、(i)(ii)で求めた固有値を式(2)に代入すれば求まる。

(2) 図-4の構造の固有値

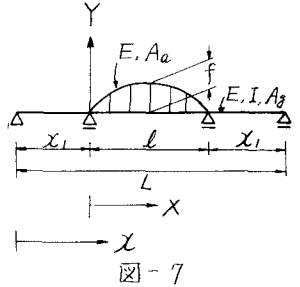
この固有値は、図-3の構造にアーチ部を結合することによって解くことが出来る。このとき注(1)のランガー橋における適合条件式をそのまま用いることが出来ないで、はじめにこのときの適合条件式について述べ、次にアーチの結合によって振動数方程式を導く。

(1) 適合条件式 対称振動のときは

$$\Delta H = \frac{16EI_B}{\pi L^2} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sum_n \frac{1}{n} \cdot A_n \cdot \cos \frac{\pi n x_1}{L} \quad (4)$$

ここに、 $B = A_a \cdot A_g / [A_a + A_g \{1 + 8 \cdot (\frac{f}{L})^2 + 19.2 \cdot (\frac{f}{L})^4\}]$ 、 ΔH は振動時のアーチの水平推力、記号は図-7を参照。

逆対称振動のときは $\Delta H = 0$ となり、アーチは働かないで、図-3の連続梁の逆対称振動と一致することになる。



(2) 対称振動時の振動数方程式

図-2の単純梁に、図-8(b)の集中周期力 $P_1 = P_2 = P$ と、図-8(a)の等分布周期力 p_g をかけたとき、中間支点でたわみ $w(x=x_1) = 0$ の条件と、切りはなした図-8(c)のアーチに $p_a = \frac{8f}{L^2} \Delta H$ なる等分布周期力をかけたときのアーチのたわみと、アーチ下部の桁のたわみが等しく、かつ自由振動しているときには $p_a + p_g = 0$ 、すなわち外力は働いていないという条件との2つから次の2式が得られる。

$$\begin{cases} A_{11} \cdot P + A_{12} \cdot p_g = 0 \\ A_{21} \cdot P + A_{22} \cdot p_g = 0 \end{cases} \quad (5)$$

P と p_g とが同時にゼロでないときに式(5)が同時に成立するには次式が成立すべきである。

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

これが振動数方程式となる。

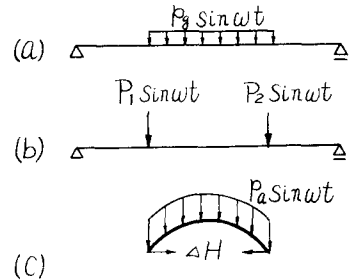


図-8

(1) 逆対称振動時の振動数方程式

このときは $\Delta H = 0$ であるから式(3)と一致する。しかし $n = 2, 4, 6, \dots$ 。

(2) 振動モードはたわみの式より得られ次式となる。

$$w(x_1) = \text{const} \times \left\{ \sum_n \frac{1}{n^4 \pi^4 - \omega^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n x_1}{L} \cdot \sin \frac{\pi n x_1}{L}}{L} - K \cdot \sum_n \frac{1}{n(n^4 \pi^4 - \omega^2)} \cdot \cos \frac{\pi n x_1}{L} \cdot \sin \frac{\pi n x_1}{L} \right\} \quad (7)$$

ここに $K = p_g/p$ であって、固有値を式(5)の1つの式に代入して得られるのである。

(3) 図-1の構造の固有値

図-1の固有値を求めるには、(2)の両側径間にヒンジを挿入すればよい。これについては注(2)の方法を適用する。

(1) 対称振動の振動数方程式

図-9のとき、 $m = m_1 = m_2$ 、 $P = P_1 = P_2$ と構造の対称性を考慮して、任意点のたわみ式は

$$w(x_1) = \sum_n \frac{-2}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \ddot{\Phi}_n(x_1) \cdot \Phi_n(x_1) \cdot m + \sum_n \frac{2}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \Phi_n(x_2) \cdot \Phi_n(x_1) \cdot P + \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \left(\int_{x_2}^{x_3} \ddot{\Phi}_n(x) \cdot dx \right) \cdot \Phi_n(x_1) \cdot p_g \quad (8)$$

ただし、 $n = 1, 3, 5, \dots$ 、 $m(x) = M(x) \cdot \Delta x$ 。ここで収束をよくするために、 m と P の項を静的たわみ

と動的たわみに分けると、結局次式となる。

$$\begin{aligned} W(x_i) = W_{sp} &- \int \frac{2\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \ddot{\Phi}_n(x_i) \cdot \Phi_n(x_i) \cdot M \\ &+ W_{sp} + \int \frac{2\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \Phi_n(x_2) \cdot \Phi_n(x_i) \cdot P \\ &+ \int \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \left(\int \Phi_n(x) \cdot dx \right) \cdot \Phi_n(x_i) \cdot P_g \end{aligned} \quad (9)$$

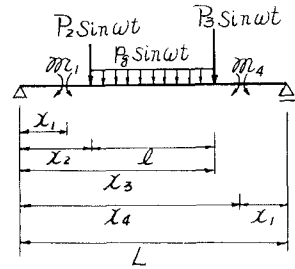


図-9

ここに W_{sp} と W_{sp} は静力学により求められる代数式で表される項である。式(9)において、支点変位=0の条件を入れると

$$\begin{aligned} \frac{M}{EI} \cdot x_1 - \int \frac{2\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \ddot{\Phi}_n(x_1) \cdot \Phi_n(x_2) \cdot M + \frac{Px_2^2}{6EI} \cdot (3L - 4x_2) + \int \frac{2\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \Phi_n(x_2) \cdot \Phi_n(x_2) \cdot P \\ + \int \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \left(\int \Phi_n(x) \cdot dx \right) \cdot \Phi_n(x_2) \cdot P_g = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)を2回微分して、ヒンジ点の曲げモーメント=0の条件を入れると

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \ddot{\Phi}_n(x_1) \cdot \ddot{\Phi}_n(x_1) \cdot M + \frac{P}{EI} \cdot x_1 - 2 \int \frac{\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \Phi_n(x_2) \cdot \ddot{\Phi}_n(x_1) \cdot P \\ - \int \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \left(\int \Phi_n(x) \cdot dx \right) \cdot \ddot{\Phi}_n(x_1) \cdot P_g = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

さらに図-9の桁のたわみと切りはなしたアーチ(図-8(c))のたわみを等置し、 $P_a + P_g = 0$ の条件より

$$\begin{aligned} \frac{512Ef^2B\pi}{9\ell^5\ell^2} \int \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \sin \frac{\pi\pi x_1}{L} \cdot \cos \frac{\pi\pi x_2}{L} \cdot M + \frac{512Ef^2B}{9\pi\ell^5} \int \frac{1}{\pi(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \sin \frac{\pi\pi x_2}{L} \cdot \cos \frac{\pi\pi x_2}{L} \cdot P \\ + \left\{ \frac{512Ef^2BL}{9\pi\ell^5} \int \frac{1}{\pi^2(\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \cos^2 \frac{\pi\pi x_2}{L} + 1 \right\} \cdot P_g = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式(10)、(11)、(12)の M 、 P 、 P_g に関する係数行列式=0が振動数方程式となる。式(10)、(11)、(12)に固有値を入れて、 $M/P = K_1$ 、 $P_g/P = K_2$ とおくと K_1 、 K_2 が求まるので、これをたわみの式(9)に入れると各国固有値に対応する振動モードが求まる。

(4) 逆対称振動数方程式

このときは $\Delta H = 0$ であるから、図-5のゲルバー梁のそれと同じである。⁽²⁾

B. 計算例

中央径間のランガ一部は戸崎橋の諸元を用い、側径間及びヒンジの位置を図-10に示す。戸崎橋の諸元は表-1。さらに図-3、図-4、図-1(図-10)の構造の対称振動の固有値を比較すると表-2のとおりである。また図-10の構造の対称振動モードを図-11に示す。

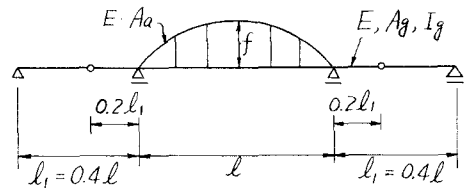


図-10

種類	記号	数 値	種類	記号	数 値
支 間	ℓ	$1.392 \times 10^4 \text{ cm}$	桁の断面二次モーメント	I	$6.232 \times 10^6 \text{ cm}^4$
拱肋の拱矢	f	$1.92 \times 10^3 \text{ cm}$	橋の全重量	$M=9\ell$	$4.4217 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{cm}^{-1}$
補剛桁の断面積	A_g	562.35 cm^2	弾性係数	E	$2.1 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$
拱肋の断面積	A_a	345.40 cm^2			

表-1

C. 他の解析法

結合法による他の解析法の一つは次のとおりである。すなわち、図-1の構造をまず、3つの単純梁に分け、これにヒンジを挿入し、アーチを結合する。この方法によつて式をみちびき、同じ例題を解いて一致した結果を得ている。

結び

連続梁、連続梁の中央スパンに放物線アーチを付した構造、およびランガーゲルバー橋の固有値と固有モードを結合法によつて解く場合の式を誘導し、計算例を示した。理解を容易にするためと固有値の比較のために(1),(2),(3)の段階に分けて記したが、ランガーゲルバー橋の固有値は、もちろん式(13)のみで解けるわけである。この例題の結果からは、アーチは1次振動数を高くすることによって効果が有り、2次より高次のものについては効果が期待できないことが知られる。

	3径間連続桁	3径間ランガー橋	ランガーゲルバー橋
ω_1	52.7	224.9	216.2
ω_3	232.8	243.3	239.6
ω_5	364.5	382.6	353.6
ω_7	799.4	800.4	613.6

表-2

$$\times \sqrt{\frac{EI}{PL^4}}$$

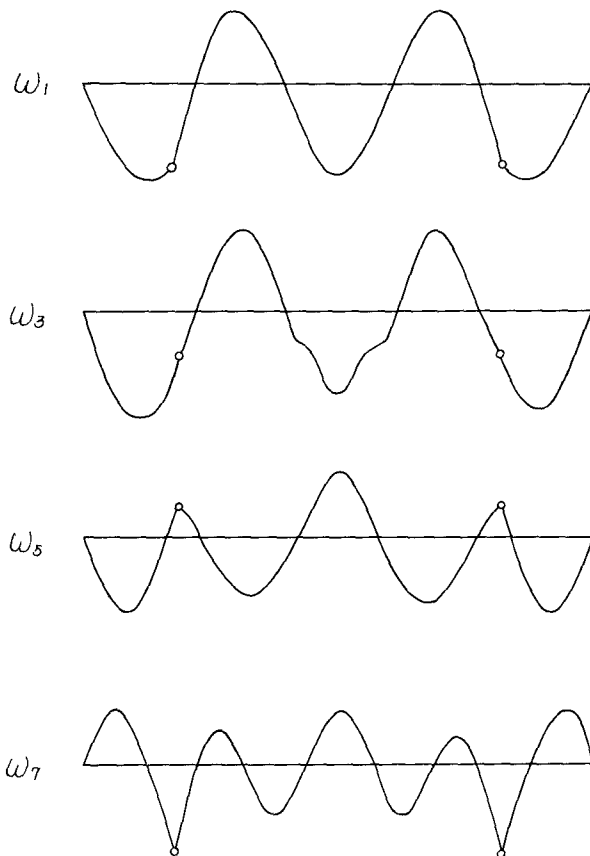


図-11

注(1) 吉村、平井； ランガー橋の動的解析 土木学会論文集101号

注(2) 平井、吉村； 結合法によるゲルバー系梁の動的解析

昭和43年10月 土木学会年次講演会