I-85

3ヒンジアーチの自由振動

長崎大学 工学部 正員 崎山 毅

1．まえがき　著者はゲルバー梁、3ヒンジアーチ、連続梁、階段状変断面梁あるいは集中荷重、部分的分布荷重の作用を受ける梁などのように、その構造形式、断面形状あるいは荷重形態のゆえに梁の中間部でたわみ角、曲げモーメント、せん断力あるいは曲げ剛性、伸び剛性などの諸量のうちのある量が不連続関数となる梁構造物に対して、微分方程式に基づく解法を確立せんとするものであるが、まず、中間ヒンジの左右両部においてたわみ角が不連続となる、3ヒンジアーチを取り上げ、その自由振動性状を解析する。アーチの振動に関しては、F.W. Waltking[1]をはじめ、少なからぬ研究者による成果が公表されているが、いずれも2ヒンジアーチないしは固定アーチを対象とした研究がほとんどで、3ヒンジアーチの自由振動を取り扱った論文はないようである。ここで、中間ヒンジが任意の位置にある、最も一般的な3ヒンジ円弧アーチの固有振動数および振動モードを明らかにする。

2．円弧アーチの基本方程式　変形に関する微分方程式および断面力と変形量との関係など、円弧アーチの変形、断面力の解析に必要な基本方程式はWaltkingによって導かれた。すなわち、アーチ部材の任意点の半径方向および接線方向の変位と荷重強度をそれぞれ u、w と p、q で表わせば、基本方程式は次の連立微分方程式となる。

$$\frac{EA}{R^2}\left(\frac{dw}{d\varphi}-u\right)-\frac{EI}{R^4}\left(\frac{d^4u}{d\varphi^4}+\frac{d^3w}{d\varphi^3}\right)+p=0 \qquad (1\cdot a)$$

$$\frac{EA}{R^2}\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2}-\frac{du}{d\varphi}\right)+\frac{EI}{R^4}\left(\frac{d^3u}{d\varphi^3}+\frac{d^4w}{d\varphi^4}\right)+q=0 \qquad (1\cdot b)$$

式中の E，A，I，R はそれぞれ円弧アーチ部材のヤング率、断面積、断面二次モーメント、アーチ軸半径を表わす。また φ は慣用の極座標であり、動径の回転方向が時計のそれと一致する場合を正とする。外力 p、q の正負に関しては、それぞれ円弧の中心点に向うものおよび円弧の中心点に関して時計回りのモーメントを形成するものを正としている。

連立微分方程式(1·a),(1·b)より半径および接線方向の変位 u，w が求まれば、たわみ角 θ，曲げモーメント M，軸力 N，せん断力 Q の諸量は次の各式により算定される。

$$\theta=\frac{1}{R}\left(\frac{du}{d\varphi}+w\right) \qquad (2\cdot a) \qquad\qquad M=-\frac{EI}{R^2}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{dw}{d\varphi}\right) \qquad (2\cdot b)$$

$$N=\frac{EA}{R}\left(\frac{dw}{d\varphi}-u\right) \qquad (2\cdot c) \qquad\qquad Q=-\frac{EI}{R^3}\left(\frac{d^3u}{d\varphi^3}+\frac{d^2w}{d\varphi^2}\right) \qquad (2\cdot d)$$

3．円弧アーチの自由振動　アーチの単位長さ当りの質量を ρ とし，$p=-\rho\,\partial^2u/\partial t^2$，$q=-\rho\,\partial^2w/\partial t^2$ を式(1·a),(1·b)に代入すれば、アーチの自由振動方程式がえられる。更に、アーチの固有角振動数を ω とし、$u(\varphi,t)=\overline{U}(\varphi)\cdot e^{i\omega t}$, $w(\varphi,t)=\overline{W}(\varphi)\cdot e^{i\omega t}$ とおいて、時間変数 t を分離すれば、規準関数 $\overline{U}$, $\overline{W}$ に関する次式をえる。

$$a\left(\frac{d\overline{W}}{d\varphi}-\overline{U}\right)-\left(\frac{d^4\overline{U}}{d\varphi^4}+\frac{d^3\overline{W}}{d\varphi^3}\right)+\lambda^4\overline{U}=0 \qquad (3\cdot a)$$

$$a\left(\frac{d^2\overline{W}}{d\varphi^2}-\frac{d\overline{U}}{d\varphi}\right)+\left(\frac{d^3\overline{U}}{d\varphi^3}+\frac{d^2\overline{W}}{d\varphi^2}\right)+\lambda^4\overline{W}=0 \qquad (3\cdot b)$$

ただし　$a = R^2A/I = (R/\sqrt{I/A})^2$, $\lambda^4 = \rho\omega^2R^4/EI$

規準函数$\bar{U}$、$\bar{W}$に関する連立微分方程式(3·a),(3·b)を、与えられた円弧アーチの境界条件の下で解くことにより、固定アーチや2ヒンジアーチに関しては、所要の固有振動数と振動モードをえることができるが、アーチの中間部にヒンジが存在する3ヒンジアーチや1ヒンジアーチにおいては、中間ヒンジの左右両部で連立微分方程式を解かねばならず、その結果積分定数は固定アーチ、2ヒンジアーチにくらべて2倍の12個となり、式の取り扱いが極めて繁雑になる。ここにおいて、この繁雑さを回避しうる何らかの工夫がなされるべきであると考える。

4. 3ヒンジアーチの自由振動　3ヒンジアーチの自由振動の基本方程式として式(3·a),(3·b)を用いる。図-1に示す3ヒンジアーチにおいて、方程式(3·a),(3·b)の解は$\varphi=0,\alpha$における境界条件を満足すると同時に、$\varphi=\beta$なる中間ヒンジ点における変位、軸力、せん断力の連続条件を満足し、曲げモーメントに関しても$\varphi=\beta$点においてその値が0であるという条件を満足しなければならない。

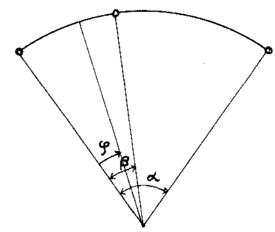


図-1

いま、半径方向変位および接線方向変位の規準函数$\bar{U}$, $\bar{W}$を単位階段函数$\bar{u}(\varphi-\beta)$を用いて次のように表わす。

$$\bar{U}(\varphi) = \bar{U}_1(\varphi) + \bar{U}_2(\varphi)\,\bar{u}(\varphi-\beta) \qquad (\varphi \neq \beta) \qquad (4\cdot a)$$

$$\bar{W}(\varphi) = \bar{W}_1(\varphi) + \bar{W}_2(\varphi)\,\bar{u}(\varphi-\beta) \qquad (\varphi \neq \beta) \qquad (4\cdot b)$$

函数$\bar{U}$, $\bar{W}$は$\varphi=\beta$においては定義していないが、函数$\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$に関してはその限りではない。

たわみ角、曲げモーメント、軸力およびせん断力の規準函数を改めて、それぞれθ, M, N, Qで表わせば、式(2·a)~(2·d)より

$$\theta(\varphi) = \theta_1(\varphi) + \theta_2(\varphi)\bar{u}(\varphi-\beta) = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{d\bar{U}_1}{d\varphi} + \bar{W}_1\right) + \left(\frac{d\bar{U}_2}{d\varphi} + \bar{W}_2\right)\bar{u}(\varphi-\beta)\right] \qquad (5\cdot a)$$

$$M(\varphi) = M_1(\varphi) + M_2(\varphi)\bar{u}(\varphi-\beta) = -\frac{EI}{R^2}\left[\left(\frac{d^2\bar{U}_1}{d\varphi^2} + \frac{d\bar{W}_1}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^2\bar{U}_2}{d\varphi^2} + \frac{d\bar{W}_2}{d\varphi}\right)\bar{u}(\varphi-\beta)\right] \qquad (5\cdot b)$$

$$N(\varphi) = N_1(\varphi) + N_2(\varphi)\bar{u}(\varphi-\beta) = \frac{EA}{R}\left[\left(\frac{d\bar{W}_1}{d\varphi} - \bar{U}_1\right) + \left(\frac{d\bar{W}_2}{d\varphi} - \bar{U}_2\right)\bar{u}(\varphi-\beta)\right] \qquad (5\cdot c)$$

$$Q(\varphi) = Q_1(\varphi) + Q_2(\varphi)\bar{u}(\varphi-\beta) = -\frac{EI}{R^3}\left[\left(\frac{d^3\bar{U}_1}{d\varphi^3} + \frac{d^2\bar{W}_1}{d\varphi^2}\right) + \left(\frac{d^3\bar{U}_2}{d\varphi^3} + \frac{d^2\bar{W}_2}{d\varphi^2}\right)\bar{u}(\varphi-\beta)\right] \qquad (5\cdot d)$$

したがって、3ヒンジアーチの境界条件は次のとおりとなる。すなわち

$$\varphi=0\,;\ U_1(0) = \bar{W}_1(0) = M_1(0) = 0 \qquad (6\cdot a) \qquad \varphi=\alpha\,;\ U_1(\alpha)+U_2(\alpha) = \bar{W}_1(\alpha)+\bar{W}_2(\alpha) = M_1(\alpha)+M_2(\alpha) = 0 \qquad (6\cdot b)$$

また、$\varphi=\beta$点における連続条件は

$$\varphi=\beta\,;\ U_2(\beta) = \bar{W}_2(\beta) = N_2(\beta) = Q_2(\beta) = 0 \qquad (6\cdot c)$$

さらに、$\varphi=\beta$点における曲げモーメントの値は0であるゆえ

$$\varphi=\beta\,;\ M_1(\beta) = 0 \qquad (6\cdot d) \qquad M_2(\beta) = 0 \qquad (6\cdot e)$$

次に、式(4·a),(4·b)を方程式(3·a),(3·b)に代入して

$$\left.\begin{aligned}
&\left[a\left(\frac{d\bar{W}_1}{d\varphi} - \bar{U}_1\right) - \left(\frac{d^4\bar{U}_1}{d\varphi^4} + \frac{d^3\bar{W}_1}{d\varphi^3}\right) + \lambda^4\bar{U}_1\right] + \left[a\left(\frac{d\bar{W}_2}{d\varphi} - \bar{U}_2\right) - \left(\frac{d^4\bar{U}_2}{d\varphi^4} + \frac{d^3\bar{W}_2}{d\varphi^3}\right) + \lambda^4\bar{U}_2\right]\bar{u}(\varphi-\beta) = 0 \\
&\left[a\left(\frac{d^2\bar{W}_1}{d\varphi^2} - \frac{d\bar{U}_1}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^3\bar{U}_1}{d\varphi^3} + \frac{d^2\bar{W}_1}{d\varphi^2}\right) + \lambda^4\bar{W}_1\right] + \left[a\left(\frac{d^2\bar{W}_2}{d\varphi^2} - \frac{d\bar{U}_2}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^3\bar{U}_2}{d\varphi^3} + \frac{d^2\bar{W}_2}{d\varphi^2}\right) + \lambda^4\bar{W}_2\right]\bar{u}(\varphi-\beta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

をえる。

ところで、次の2つの連立微分方程式

$$\left.\begin{aligned} &a\left(\frac{d\bar{W}_1}{d\varphi}-\bar{V}_1\right)-\left(\frac{d^4\bar{V}_1}{d\varphi^4}+\frac{d^3\bar{W}_1}{d\varphi^3}\right)+\lambda^4\bar{V}_1=0 \\ &a\left(\frac{d^2\bar{W}_1}{d\varphi^2}-\frac{d\bar{V}_1}{d\varphi}\right)+\left(\frac{d^3\bar{V}_1}{d\varphi^3}+\frac{d^2\bar{W}_1}{d\varphi^2}\right)+\lambda^4\bar{W}_1=0 \end{aligned}\right\}(8\cdot a) \qquad \left.\begin{aligned} &a\left(\frac{d\bar{W}_2}{d\varphi}-\bar{V}_2\right)-\left(\frac{d^4\bar{V}_2}{d\varphi^4}+\frac{d^3\bar{W}_2}{d\varphi^3}\right)+\lambda^4\bar{V}_2=0 \\ &a\left(\frac{d^2\bar{W}_2}{d\varphi^2}-\frac{d\bar{V}_2}{d\varphi}\right)+\left(\frac{d^3\bar{V}_2}{d\varphi^3}+\frac{d^2\bar{W}_2}{d\varphi^2}\right)+\lambda^4\bar{W}_2=0 \end{aligned}\right\}(8\cdot b)$$

を満足する解$\bar{V}_1$, $\bar{W}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{W}_2$は明らかに原方程式(7)を満足するゆえ、結局本問題は条件(6·a)～(6·d)を満足する連立微分方程式(8·a), (8·b)の解を求めることに帰着する。

条件(6·a), (6·c), (6·e)を満足する方程式(8·a), (8·b)の解$\bar{V}_1$, $\bar{W}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{W}_2$はそれぞれ次式となる。

(i) $a \geqq \lambda^4$ のとき

$$\bar{W}_1(\varphi)=(a_1 ch I\varphi+a_2 ch J\varphi+a_3 co K\varphi)\cdot\theta_1(0)+(b_1 sh I\varphi+b_2 sh J\varphi+b_3 si K\varphi)N_1(0)-(c_1 ch I\varphi+c_2 ch J\varphi+c_3 co K\varphi)\cdot\frac{Q_1(0)}{a} \qquad (9\cdot a)$$

$$\bar{V}_1(\varphi)=(d_1 sh I\varphi+d_2 sh J\varphi+d_3 si K\varphi)\cdot\theta_1(0)-(c_1 ch I\varphi+c_2 ch J\varphi+c_3 co K\varphi)\cdot N_1(0)+(e_1 sh I\varphi+e_2 sh J\varphi+e_3 si K\varphi)\cdot\frac{Q_1(0)}{a} \qquad (9\cdot b)$$

$$\bar{W}_2(\varphi)=[a_1 ch I(\varphi-\beta)+a_2 ch J(\varphi-\beta)+a_3 co K(\varphi-\beta)]\cdot\theta_2(\beta) \qquad (9\cdot c)$$

$$\bar{V}_1(\varphi)=[d_1 sh I(\varphi-\beta)+d_2 sh J(\varphi-\beta)+d_3 si K(\varphi-\beta)]\cdot\theta_2(\beta) \qquad (9\cdot d)$$

$$a_1=\frac{I^2+(1-\frac{\lambda^4}{a})}{(I^2-J^2)(I^2+K^2)},\ a_2=\frac{J^2+(1-\frac{\lambda^4}{a})}{(J^2-I^2)(J^2+K^2)},\ a_3=-\frac{K^2-(1-\frac{\lambda^4}{a})}{(K^2+I^2)(K^2+J^2)},\ b_1=\frac{I^4+(a-\lambda^4)}{I(I^2-J^2)(I^2+K^2)},\ b_2=\frac{J^4+(a-\lambda^4)}{J(J^2-I^2)(J^2+K^2)}$$

$$b_3=\frac{K^4+(a-\lambda^4)}{K(K^2+I^2)(K^2+J^2)},\ c_1=\frac{I^2-a}{(I^2-J^2)(I^2+K^2)},\ c_2=\frac{J^2-a}{(J^2-I^2)(J^2+K^2)},\ c_3=-\frac{K^2+a}{(K^2+I^2)(K^2+J^2)},\ d_1=\frac{I[I^2+(1+\frac{\lambda^4}{a})]}{(I^2-J^2)(I^2+K^2)}$$

$$d_2=\frac{J[J^2+(1+\frac{\lambda^4}{a})]}{(J^2-I^2)(J^2+K^2)},\ d_3=\frac{K[K^2-(1+\frac{\lambda^4}{a})]}{(K^2+I^2)(K^2+J^2)},\ e_1=\frac{I^2+\frac{\lambda^4}{a+1}}{I(I^2-J^2)(I^2+K^2)},\ e_2=\frac{J^2+\frac{\lambda^4}{a+1}}{J(J^2-I^2)(J^2+K^2)},\ e_3=-\frac{K^2-\frac{\lambda^4}{a+1}}{K(K^2+I^2)(K^2+J^2)}$$

(ii) $a < \lambda^4$ のとき

$$\bar{W}_1(\varphi)=(a_1 ch I\varphi+a_2 co J\varphi+a_3 co K\varphi)\cdot\theta_1(0)+(b_1 sh I\varphi+b_2 si J\varphi+b_3 si K\varphi)\cdot N_1(0)-(c_1 ch I\varphi+c_2 co J\varphi+c_3 co K\varphi)\cdot\frac{Q_1(0)}{a} \qquad (10\cdot a)$$

$$\bar{V}_1(\varphi)=(d_1 sh I\varphi+d_2 si J\varphi+d_3 si K\varphi)\cdot\theta_1(0)-(c_1 ch I\varphi+c_2 co J\varphi+c_3 co K\varphi)\cdot N_1(0)+(e_1 sh I\varphi+e_2 si J\varphi+e_3 si K\varphi)\cdot\frac{Q_1(0)}{a} \qquad (10\cdot b)$$

$$\bar{W}_2(\varphi)=[a_1 ch I(\varphi-\beta)+a_2 co J(\varphi-\beta)+a_3 co K(\varphi-\beta)] \qquad (10\cdot c)$$

$$\bar{V}_2(\varphi)=[d_1 sh I(\varphi-\beta)+d_2 si J(\varphi-\beta)+d_3 si K(\varphi-\beta)] \qquad (10\cdot d)$$

$$a_1=\frac{I^2+(1-\frac{\lambda^4}{a})}{(I^2+J^2)(I^2+K^2)},\ a_2=-\frac{J^2-(1-\frac{\lambda^4}{a})}{(I^2+J^2)(J^2-K^2)},\ a_3=\frac{K^2-(1-\frac{\lambda^4}{a})}{(K^2+I^2)(J^2-K^2)},\ b_1=\frac{I^4+(a-\lambda^4)}{I(I^2+J^2)(I^2+K^2)},\ b_2=\frac{J^4+(a-\lambda^4)}{J(I^2+J^2)(J^2-K^2)}$$

$$b_3=-\frac{K^4+(a-\lambda^4)}{K(K^2+I^2)(J^2-K^2)},\ c_1=\frac{I^2-a}{(I^2+J^2)(I^2+K^2)},\ c_2=-\frac{J^2+a}{(I^2+J^2)(J^2-K^2)},\ c_3=\frac{K^2+a}{(K^2+I^2)(J^2-K^2)},\ d_1=\frac{I[I^2+(1+\frac{\lambda^4}{a})]}{(I^2+J^2)(I^2+K^2)}$$

$$d_2=\frac{J[J^2-(1+\frac{\lambda^4}{a})]}{(I^2+J^2)(J^2-K^2)},\ d_3=-\frac{K[K^2-(1+\frac{\lambda^4}{a})]}{(K^2+I^2)(J^2-K^2)},\ e_1=\frac{I^2+\frac{\lambda^4}{a+1}}{I(I^2+J^2)(I^2+K^2)},\ e_2=-\frac{J^2-\frac{\lambda^4}{a+1}}{J(I^2+J^2)(J^2-K^2)},\ e_3=\frac{K^2-\frac{\lambda^4}{a+1}}{K(K^2+I^2)(J^2-K^2)}$$

式(9·a)～(10·d)中の定数I, J, Kは次の各式により算定する。

$$I^2=\left|2\sqrt[3]{r}\cdot co\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{3}\left(2+\frac{\lambda^4}{a}\right)\right|,\ J^2=\left|2\sqrt[3]{r}\cdot co\frac{\gamma+4\pi}{3}-\frac{1}{3}\left(2+\frac{\lambda^4}{a}\right)\right|,\ K^2=\left|2\sqrt[3]{r}\cdot co\frac{\gamma+2\pi}{3}-\frac{1}{3}\left(2+\frac{\lambda^4}{a}\right)\right|$$

$$r=\left\{-\frac{1}{27}\left[\left(1-\lambda^4-\frac{\lambda^4}{a}\right)-\frac{1}{3}\left(2+\frac{\lambda^4}{a}\right)^2\right]^3\right\}^{\frac{1}{2}},\ \gamma=co^{-1}\left(-\frac{\varepsilon}{2r}\right),\ \varepsilon=\frac{2}{27}\left(2+\frac{\lambda^4}{a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(2+\frac{\lambda^4}{a}\right)\left(1-\lambda^4-\frac{\lambda^4}{a}\right)+\lambda^4\left(1-\frac{\lambda^4}{a}\right)$$

次に残りの条件(6·d), (6·e)を用いれば、未定常数$\theta_1(0)$, $N_1(0)$, $Q_1(0)/a$, $\theta_2(\beta)$に関する次の連立方程式をえる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ N_1(0) \\ Q_1(0)/a \\ \theta_2(\beta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

したがって、式(11)の左辺の係数行列式=0 よりえられる方程式が所要の3ヒンジアーチの振動数方程式となる。ただし、係数 $a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots a_{44}$ の内容は次のとおりである。

i) $a \geqq \lambda^4$ のとき

$$a_{11}=I(a_1+d_1I)\,\mathrm{sh}\,I\beta+J(a_2+d_2J)\,\mathrm{sh}\,J\beta-K(a_3+d_3K)\,\mathrm{si}\,K\beta,\quad a_{12}=I(b_1-c_1I)\,\mathrm{ch}\,I\beta+J(b_2-c_2J)\,\mathrm{ch}\,J\beta+K(b_3+c_3K)\,\mathrm{co}\,K\beta$$

$$a_{13}=-[I(c_1-e_1I)\,\mathrm{sh}\,I\beta+J(c_2-e_2J)\,\mathrm{sh}\,J\beta-K(c_3-e_3K)\,\mathrm{si}\,K\beta],\quad a_{21}=d_1\,\mathrm{sh}\,I\alpha+d_2\,\mathrm{sh}\,J\alpha+d_3\,\mathrm{si}\,K\alpha$$

$$a_{22}=-(c_1\,\mathrm{ch}\,I\alpha+c_2\,\mathrm{ch}\,J\alpha+c_3\,\mathrm{co}\,K\alpha),\quad a_{23}=e_1\,\mathrm{sh}\,I\alpha+e_2\,\mathrm{sh}\,J\alpha+e_3\,\mathrm{si}\,K\alpha,\quad a_{24}=d_1\,\mathrm{sh}\,I(\alpha-\beta)+d_2\,\mathrm{sh}\,J(\alpha-\beta)+d_3\,\mathrm{si}\,K(\alpha-\beta)$$

$$a_{31}=a_1\,\mathrm{ch}\,I\alpha+a_2\,\mathrm{ch}\,J\alpha+a_3\,\mathrm{co}\,K\alpha,\quad a_{32}=b_1\,\mathrm{sh}\,I\alpha+b_2\,\mathrm{sh}\,J\alpha+b_3\,\mathrm{si}\,K\alpha,\quad a_{33}=-(c_1\,\mathrm{ch}\,I\alpha+c_2\,\mathrm{ch}\,J\alpha+c_3\,\mathrm{co}\,K\alpha)$$

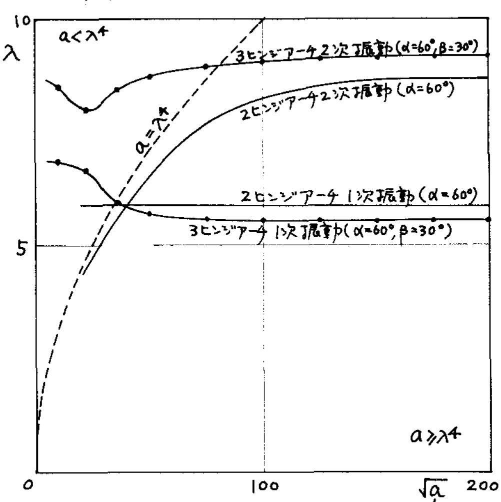
$$a_{34}=a_1\,\mathrm{ch}\,I(\alpha-\beta)+a_2\,\mathrm{ch}\,J(\alpha-\beta)+a_3\,\mathrm{co}\,K(\alpha-\beta),\quad a_{41}=I(a_1+d_1I)\,\mathrm{sh}\,I\alpha+J(a_2+d_2J)\,\mathrm{sh}\,J\alpha-K(a_3+d_3K)\,\mathrm{si}\,K\alpha$$

$$a_{42}=I(b_1-c_1I)\,\mathrm{ch}\,I\alpha+J(b_2-c_2J)\,\mathrm{ch}\,J\alpha+K(b_3+c_3K)\,\mathrm{co}\,K\alpha,\quad a_{43}=-[I(c_1-e_1I)\,\mathrm{sh}\,I\alpha+J(c_2-e_2J)\,\mathrm{sh}\,J\alpha-K(c_3-e_3K)\,\mathrm{si}\,K\alpha]$$

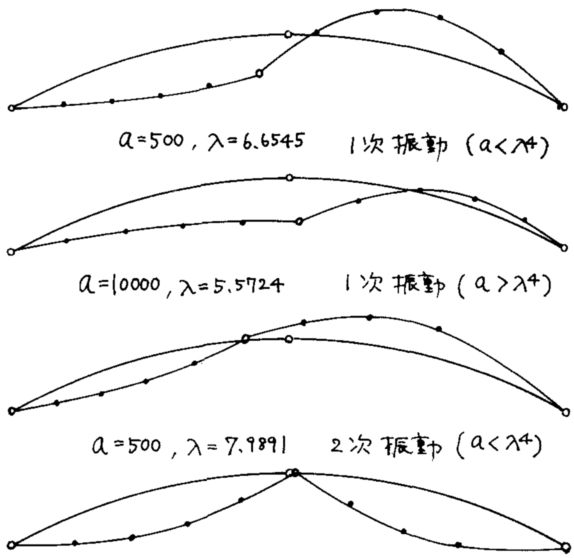
$$a_{44}=I(a_1+d_1I)\,\mathrm{sh}\,I(\alpha-\beta)+J(a_2+d_2J)\,\mathrm{sh}\,J(\alpha-\beta)-K(a_3+d_3K)\,\mathrm{si}\,K(\alpha-\beta)$$

ii) $a < \lambda^4$ のとき　　省略

5. 計算結果



図−2　固有値 $\lambda=\left(\frac{\rho\omega^2R^4}{EI}\right)^{\frac{1}{4}}$



図−3　振動モード

中心角$\alpha=60°$, 中間ヒンジ位置$\beta=30°$の3ヒンジアーチの固有値, 振動モードを図−2, 3に示す。第2次振動モードにおいて、$a<\lambda^4$ の場合と $a>\lambda^4$ の場合との相違すなわち太短いアーチと細長いアーチのモードの違いがはっきりと表われている。

6. 結び　ゲルバー梁、3ヒンジアーチ、連続梁、階段状変断面梁あるいは集中荷重を受ける梁などのように中間部において何らかの不連続要素が存在する梁構造物の微分方程式による解法を示した。本法によれば上記のごとき梁構造物も全スパン分布荷重を受ける単純梁のような連続要素のみから成る梁構造物と全く同様の取り扱いにより、変形、断面力を求めることができる。

（参考文献）

(1) F. W. Waltking「Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern」 Ing. Arch. Bd 5 (1934) S 429〜449