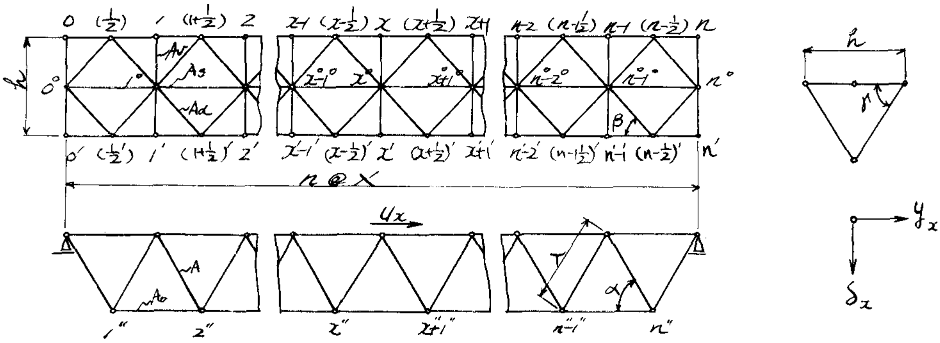
I-83 三角形断面を有する三弦トラス橋の固有振動について

室蘭工業大学 正員 能町純雄
函館ドックK.K. 正員 瀬谷拓治
仝 上 正員 ○小針憲司

断面として逆三角形を有する図のような三弦材トラスを橋梁とした場合の振動性状を考察したものである。上面構は真中に一本の縦材を有しているので、この点をも考慮し、三弦材について3n個、上面補助縦材についてn個、自由度をとり、それらに対応する力のつりあいを作ると、マトリックスの大きさは11×11×n²となる。nを8とすれば88元のマトリックスになるので、中型の電算機では効果的に解くことができない。しかしフーリエ定和分変換を用いてこれを11元のマトリックスに変換できる。



1) フーリエ定和分変換公式

a) 逆変換公式

Symbolic Notation

$$S_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x)\sin\frac{i\pi}{n}x,\quad C_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x)\cos\frac{i\pi}{n}x,\quad \overline{C}_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n} f(x)\cos\frac{i\pi}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{S}_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n} f(x)\sin\frac{i\pi}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

を導入すると

$$f(x) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} S_i[f(x)]\sin\frac{i\pi}{n}x \quad (0 < x < n) \quad (1) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{n} R_i\cos\frac{i\pi}{n}x \quad (0 \leqq x \leqq n) \quad (2)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} &R_0 = \frac{1}{n}\left\{C_0[f(x)] + \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}f(0)\right\},\quad R_i = \frac{2}{n}\left\{C_i[f(x)] + \frac{1}{2}f(n)(-1)^i + \frac{1}{2}f(0)\right\} \\ &R_n = \frac{1}{n}\left\{C_n[f(x)] + \frac{1}{2}f(n)(-1)^n + \frac{1}{2}f(0)\right\} \qquad x,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n, \end{aligned}\right\} (2)'$$

$$f(x) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i[f(x)]\cos\frac{i\pi}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{R_0}{n} \qquad ただし\ R_0 = \sum_{x=1}^{n} f(x) \qquad (3)$$

$$f(x) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{S}_i[f(x)]\sin\frac{i\pi}{n}\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad (4)$$

b) 二次差分、変一次差分のフーリエ定和分

ここに変一次差分というのは、$f(x+1)-f(x-1)$ を一次差分 $f(x+1)-f(x)$ と区別して仮に名付けたもの。

$$S_i[\Delta^2 f(x-1)] = -\sin\frac{i\pi}{n}\{(-1)^i f(n) - f(0)\} - D_i \cdot S_i[f(x)] \qquad (5)$$

$$C_i[\Delta^2 f(x-1)] = \Delta f(n-1)\cdot(-1)^i - \Delta f(0) - D_i\cdot\left\{\frac{1}{2}f(n)\cdot(-1)^i + \frac{1}{2}f(0) + C_i[f(x)]\right\} \qquad (6)$$

$$S_i[\Delta f(x-1)] = -2\sin\frac{i\pi}{n}\left\{\frac{1}{2}f(n)(-1)^i + \frac{1}{2}f(0) + C_i[f(x)]\right\} \qquad (7)$$

$$C_i[\Delta f(x-1)] = -\{\Delta f(n-1)\cdot(-1)^i + f(0)\} + \left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\{f(n)(-1)^i - f(0)\} + 2\sin\frac{i\pi}{n}\cdot S_i[f(x)] \qquad (8)$$

ただし

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \quad , \Delta f(x-1) = f(x+1) - f(x-1) \ , \ D_i = 2\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right)$$

2) 特性方程式

格点に関する基本差分方程式に対してフーリエ定和分変換公式を用い、重力加速度g、角速度ω、格点重量Wとし、正弦振動を仮定して$f(x)=\bar{f}(x)\sin\omega t$とすると次のような固有振動を与える特性方程式が得られる。

$$-\theta_1\mu\bar{\delta}_i - \theta_1\nu_1\bar{y}_i - \theta_2\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{u}_i'' + \theta_1\mu\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{\delta}_i'' + \theta_1\nu_1\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{y}_i'' - \omega^2\frac{W\tau}{g}\bar{\delta}_i = 0 \qquad (9)$$

$$-\theta_1\mu\bar{\delta}_i' + \theta_1\nu_1\bar{y}_i' - \theta_2\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{u}_i'' + \theta_1\mu\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{\delta}_i'' - \theta_1\nu_1\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{y}_i'' - \omega^2\frac{W\tau}{g}\bar{\delta}_i' = 0 \qquad (10)$$

$$-\theta_3\mu\bar{\delta}_i - (\theta_3\nu_1+\theta_4)\bar{y}_i + \theta_4\bar{y}_i^\circ - \theta_5\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{u}_i'' + \theta_3\mu\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{\delta}_i'' + \theta_3\nu_1\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{y}_i'' - \omega^2\frac{W\tau}{g}\bar{y}_i = 0 \qquad (11)$$

$$-\theta_4\bar{y}_i + (\theta_6\cdot D_i + 2\theta_4)\bar{y}_i^\circ - \theta_4\bar{y}_i' - \theta_7\sin\frac{i\pi}{n}\bar{u}_i + \theta_7\sin\frac{i\pi}{n}\bar{u}_i' + \omega^2\frac{W\tau^\circ}{g}\bar{y}_i^\circ = 0 \qquad (12)$$

$$-\theta_3\mu\bar{\delta}_i' - \theta_4\bar{y}_i^\circ + (\theta_3\nu_1+\theta_4)\bar{y}_i' - \theta_5\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{u}_i'' + \theta_3\mu\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{\delta}_i'' - \theta_3\nu_1\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{y}_i'' + \omega^2\frac{W\tau}{g}\bar{y}_i' = 0 \qquad (13)$$

$$\theta_7\sin\frac{i\pi}{n}\bar{y}_i^\circ - (k_4\cdot D_i + 4k_2 + \theta_8)\bar{u}_i + k_2(-D_i+4)\bar{u}_i^\circ + \theta_8\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{u}_i'' + \theta_9\mu\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{\delta}_i'' + \theta_9\nu_1\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{y}_i'' = 0 \qquad (14)$$

$$k_2(-D_i+4)\bar{u}_i - (k_3 D_i + 8k_2)\bar{u}_i^\circ + k_2(-D_i+4)\bar{u}_i' = 0 \qquad (15)$$

$$-\theta_7\sin\frac{i\pi}{n}\bar{y}_i^\circ - (k_4 D_i + 4k_2 + \theta_8)\bar{u}_i' + k_2(-D_i+4)\bar{u}_i^\circ + \theta_8\cos\frac{i\pi}{2n}\bar{u}_i'' + \theta_9\mu\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{\delta}_i'' - \theta_9\nu_1\sin\frac{i\pi}{2n}\bar{y}_i'' = 0 \qquad (16)$$

$$-\theta_9\mu\sin\frac{i\pi}{2n}(\bar{\delta}_i+\bar{\delta}_i') - \theta_9\nu_1\sin\frac{i\pi}{2n}(\bar{y}_i-\bar{y}_i') + \theta_8\cos\frac{i\pi}{2n}(\bar{u}_i+\bar{u}_i') - (\theta_{10}\cdot D_i + 2\theta_8)\bar{u}_i'' = 0 \qquad (17)$$

$$-\theta_1\mu\cos\frac{i\pi}{2n}(\bar{\delta}_i+\bar{\delta}_i') - \theta_1\nu_1\cos\frac{i\pi}{2n}(\bar{y}_i-\bar{y}_i') - \theta_2\sin\frac{i\pi}{2n}(\bar{u}_i+\bar{u}_i') + 2\theta_1\mu\bar{\delta}_i'' + \omega^2\frac{W\tau''}{g}\bar{\delta}_i'' = 0 \qquad (18)$$

$$\theta_3\mu\cos\frac{i\pi}{2n}(\bar{\delta}_i-\bar{\delta}_i') + \theta_3\nu_1\cos\frac{i\pi}{2n}(\bar{y}_i+\bar{y}_i') + \theta_5\sin\frac{i\pi}{2n}(\bar{u}_i-\bar{u}_i') - 2\theta_3\nu_1\bar{y}_i'' - \omega^2\frac{W\tau''}{g}\bar{y}_i'' = 0 \qquad (19)$$

ただし

$k_1 = 2A_u/\lambda' + 2A_d/h\cdot\sin\beta\cdot\cos^2\beta$, $k_2 = (2EA_d\cdot A_u/k_1 h\cdot\lambda')\sin\beta\cdot\cos^2\beta$, $k_3 = EA_s/\lambda' - 2k_2$

$k_4 = 2EA_u^2/k_1\cdot\lambda'^2$, $\bar{\delta}_i = S_i[\delta_x]$, $\bar{\delta}_i' = S_i[\delta_x']$, $\bar{\delta}_i'' = \bar{S}_i[\delta_x'']$, $\bar{y}_i = S_i[y_x]$

$\bar{y}_i' = S_i[y_x']$, $\bar{y}_i'' = \bar{S}_i[y_x'']$, $\bar{u}_i = \frac{1}{2}u_n(-1)^i + \frac{1}{2}u_0 + C_i[u_x]$

$\bar{u}_i^\circ = \frac{1}{2}u_n^\circ(-1)^i + \frac{1}{2}u_0^\circ + C_i[u_x^\circ]$, $u_i' = \frac{1}{2}u_n'(-1)^i + \frac{1}{2}u_0' + C_i[u_x']$, $\bar{u}_i'' = \bar{C}_i[u_x'']$

$\nu = \tan\beta$, $\nu' = \tan\alpha$, $\xi = \lambda/EA\cdot\cos^2\alpha$, $\delta_1 = A_v\cdot\lambda/h\cdot A\cdot\cos^2\alpha$, $\tau = A_0\cdot\lambda/\lambda'\cdot A\cdot\cos^2\alpha$

$\theta_1 = (2EA/\lambda)\sin^2\alpha\cdot\sin\gamma$, $\theta_2 = (2EA/\lambda)\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\gamma$, $\theta_3 = (2EA/\lambda)\sin^2\alpha\cdot\cos\gamma$

$\theta_4 = 2E\cdot A_v/h$, $\theta_5 = (2EA/\lambda)\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma$, $\theta_6 = 2k_2\cdot\tan^2\beta$, $\theta_7 = 2k_2\tan\beta$

$\theta_8 = (2EA/\lambda)\cos^2\alpha$, $\theta_9 = (2EA/\lambda)\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $\theta_{10} = EA_0/\lambda'$, $\mu = \sin\gamma$, $\nu_1 = \cos\gamma$

$A_u, A_d, A_v, A_0, A_s, A$は各弦材断面積, $\alpha, \beta, \gamma, h, \lambda, \lambda'$は図示した通りである。

3) 計算例

$\alpha = 1.08002^{rad}$ $\beta = 0.61843^{rad}$ $\gamma = 1.18076^{rad}$ $A_v = 23.98^{cm^2}$ $A_u = 168.8^{cm^2}$ $A_d = 152.5^{cm^2}$

$A_s = 101.3^{cm^2}$ $A_0 = 370.3^{cm^2}$ $A = 87.1^{cm^2}$ $\lambda = 11.03312^m$ $\lambda' = 10.4^m$ $h = 7.4^m$ $n = 7$

Case	$W\tau^{ton}$	$W\tau^{\circ\,ton}$	$W\tau''^{\,ton}$	振動周期T_{max}^{sec}	荷重	床版合成効果
1	6.415	3.018	7.436	0.34（曲げ）	自重のみ	
2	62.835	〃	〃	0.81（捩り）	全死荷重	無視
3	〃	〃	〃	0.56（曲げ）	〃	考慮

有効巾員 9.0 m