

九州大学工学部 正員 山崎徳也
 長崎大学工学部 正員 樽木 武
 九州大学工学部 学生員・高橋和雄

1. 緒言 はりが振動する場合、理想的な微小振動でない限り振幅の影響を受けることは当然である。また、スパン長を固定したはりが振動する場合、はりは振幅に依存する軸方向引張力を受け、さらに細長比の小さいはりについてはひずみの高次の項をも考慮のうえ運動方程式を求めねばならないが、いずれの場合も、運動方程式に非線型項が含まれる非線型振動となる。非線型振動に関する既往研究としては一径間ばりを対象とした吉村・植村¹⁾、Eisley²⁾、佐藤³⁾らのものが見受けられる。吉村氏らは有限変形の影響および軸力の影響を考慮した非線型振動の厳密な基礎式を誘導のうえ、軸力を考慮する必要のない単純支持ばりおよび片持ばりについて有限変形の影響を考察し、またEisleyは軸力の影響のみを考慮して、両端固定ばりの非線型振動を論じた。佐藤氏は吉村氏らの基礎式にもとづいて、有限変形および軸力の影響を同時に考慮のうえ、両端固定ばりおよび一端固定、他端単純支持ばりの非線型振動特性を明らかにした。その他、一径間ばりに関しては多数の研究があるが、連続ばりやラーメンなどについては著者らの知る限りいまだ報告はない。よってガガの未知の分野としての連続ばりを対象として、有限変形および軸力の影響を同時に考慮した非線型自由振動を報告するものである。

なお、解析にあたり次項を仮定する。

- (I) はりの中心線のひずみはその全長にわたって一様であるというCoxの仮定を用うる。すなわち、はりに作用している軸力はその平均力がはり上に一様に分布しているものと考える。
 (II) 有限変形の影響は、はりのたわみの微係数および中心線のひずみの3次の項まで採用する。ただし、ひずみの表示式に関しては2次の項まで採用する。
 (III) 連続ばりの中間支承は軸方向に可動なローラーとし、はりの材質、断面は各スパンとも一定とする。

2. 解法 減衰がなく、また有限の変位に対してひずみが微小と考えられる場合について、有限変形および軸力の影響を考慮した運動方程式を求めれば次式のごとくえられる(文献3参照)。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \left\{ 1 + 2 \frac{P}{EA} + 3 \left(\frac{P}{EA} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} + EA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left\{ \frac{P}{EA} + \left(\frac{P}{EA} \right)^2 \right\} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^3 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{P}{EA} = \frac{P}{EA} - \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

ここに、 x : はりのスパン方向の座標、 y : はりのたわみ、 L : スパン長、 E : はりの弾性係数、 I : はりの断面2次モーメント、 A : はりの断面積、 ρ : はり材の密度、 t : 時間、 P : はりに作用する軸力、 P_0 : 初期軸力(P, P_0 は共に圧縮の場合を正とする)

式(1)の解を次のごとく仮定する。 $y = a X(\omega) F(x)$ (3) ここに、 a : 最大振幅、 $X(\omega)$: 規準関数、 $F(x)$: 時間関数 規準関数 $X(x)$ として、一定軸力が作用する場合の線型振動の規準関数を仮定のうえ、式(1)にGalerkin法を適用すれば次式となる。

$$\int_0^L \left[EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \left\{ 1 + 2 \frac{P}{EA} + 3 \left(\frac{P}{EA} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} + EA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left\{ \frac{P}{EA} + \left(\frac{P}{EA} \right)^2 \right\} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^3 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x} \right\} \right] X(x) dx = 0 \quad (4)$$

式(4)の積分を行えば、 $F(\omega)$ のみで表わされる微分方程式がえられ、これを解くことによって振動数が計算される。図-1に示す連続ばりににおいて一定軸力 $P = P_0$ を受ける場合の線型振動の規準関数は次のこ

とくえられる。すなわち、区間*i*のはりが一定軸力 P_i を
受けて自由振動をしている場合のため $y_i = X_i(x_i) \sin \omega t$
とおけば、 X_i は周知のごとく次式で表わされる。

$$X_i = A_i \cosh \lambda_i x_i + B_i \sinh \lambda_i x_i + C_i \cos k_i x_i + D_i \sin k_i x_i \quad (5)$$

ここに、 $x_i = x/L_i$, $\lambda_i = \sqrt{-g_i/2 + \sqrt{g_i^2 + 4k_i^2}}/2$, $k_i = \sqrt{g_i/2 + \sqrt{g_i^2 + 4k_i^2}}/2$, $g_i = P_i L_i^3/EI$, $k_i = \sqrt{PA\omega^2/EI} L_i$, A_i, B_i, C_i, D_i : 積分定数
は1の左右端L, R点において、端モーメントが M_L^i, M_R^i となるごとく式(5)の積分定数を定めれば、それ
で次のように算定される。

$$A_i = \frac{-1}{\lambda_i + k_i^2} \frac{M_L^i L_i}{EI}, \quad B_i = \frac{1}{\lambda_i + k_i^2} (\coth \lambda_i \frac{M_L^i L_i}{EI} - \cosh k_i \frac{M_L^i L_i}{EI}), \quad C_i = -\frac{1}{\lambda_i + k_i^2} \frac{M_L^i L_i}{EI}, \quad D_i = \frac{1}{\lambda_i + k_i^2} (-\coth \lambda_i \frac{M_L^i L_i}{EI} + \cosh k_i \frac{M_L^i L_i}{EI}) \quad (6)$$

他方、3連モーメントの定理より

$$M_{i-1} L_i + 2M_i (L_i + L_{i+1}) + M_{i+1} L_{i+1} = N_i + N_{i+1} \quad (7) \quad \text{ここに、} N_i, N_{i+1}: \text{荷重項}$$

軸力 P_i の作用を受けて振動する部材では $PA X_i \omega^2 - P_i \frac{d^2 X_i}{dx_i^2}$ なる分布荷重が作用しているとみなしうから、
これに対する荷重項は次式となる。

$$N_i = -PA L_i \omega^2 \int_0^{L_i} X_i x_i (1 - \frac{x_i^2}{L_i^2}) dx_i + P_i \int_0^{L_i} \frac{dX_i}{dx_i} (1 - \frac{x_i^2}{L_i^2}) dx_i, \quad N_{i+1} = -PA L_{i+1} \omega^2 \int_0^{L_{i+1}} X_i x_i \{1 - \frac{(L_i - x_i)^2}{L_i^2}\} dx_i + P_i \int_0^{L_{i+1}} \frac{dX_i}{dx_i} (L_i - x_i) \{1 - \frac{(L_i - x_i)^2}{L_i^2}\} dx_i \quad (8)$$

式(8)の X_i に式(5)を代入する、積分定数として式(6)を用うれば次式をうる。

$$-N_i = L_i \{ f_{8,i} M_L^i + f_{9,i} M_R^i \} + L_i \{ f_{2,i} M_L^i + f_{3,i} M_R^i \}, \quad -N_{i+1} = L_i \{ f_{8,i} M_L^i + f_{9,i} M_R^i \} + L_i \{ f_{2,i} M_L^i + f_{3,i} M_R^i \} \quad (9)$$

$$\text{ここに、} f_{8,i} = \frac{k_i^4}{\lambda_i + k_i^2} \{ \frac{1}{\lambda_i} (-6\lambda_i \cosh \lambda_i - \lambda_i^2 + 6) + \frac{1}{k_i^2} (6k_i \cosh k_i - k_i^2 - 6) \}, \quad f_{9,i} = \frac{k_i^4}{\lambda_i + k_i^2} \{ \frac{1}{\lambda_i} (6\lambda_i \cosh \lambda_i - 2\lambda_i^2 - 6) + \frac{1}{k_i^2} (6k_i \cosh k_i + 2k_i^2 - 6) \}$$

$$f_{2,i} = \frac{g_i}{\lambda_i + k_i^2} \{ \frac{1}{\lambda_i} (6\lambda_i \cosh \lambda_i + \lambda_i^2 - 6) + \frac{1}{k_i^2} (6k_i \cosh k_i - k_i^2 - 6) \}, \quad f_{3,i} = \frac{g_i}{\lambda_i + k_i^2} \{ \frac{1}{\lambda_i} (-6\lambda_i \cosh \lambda_i + 2\lambda_i^2 + 6) + \frac{1}{k_i^2} (6k_i \cosh k_i + 2k_i^2 - 6) \}$$

式(7)と式(9)から一定軸力を受ける連続はりの動力学的3連モーメント式が次のごとく求められる。

$$M_{i-1} L_i (1 + f_{2,i} + f_{9,i}) + M_i \{ L_i (2 + f_{2,i} + f_{9,i}) + L_{i+1} (2 + f_{2,i+1} + f_{9,i+1}) \} + M_{i+1} L_{i+1} (1 + f_{2,i+1} + f_{9,i+1}) = 0 \quad (10)$$

相隣る2径間の組合せ全部に対して式(10)の3連モーメント式を求めれば、それらの諸式から連続は
りの自由振動に関する固有値 k_i がえられる。また、この結果を式(5)に代入すれば、規準関数 X_i が算定
され、式(4)に代入のうえ積分すれば次式をうる。

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \alpha F + 2\beta F^3 = 0 \quad (11) \quad \text{ここに、} \alpha = \frac{EI}{PA L^2} [\frac{1}{L_i} \{ 1 + 2 \frac{P_i L_i^2}{EI} + 3 \frac{P_i^2 L_i^4}{EI^2} \} + \frac{1}{L_{i+1}} \{ \frac{P_{i+1} L_{i+1}^2}{EI} + \frac{P_{i+1}^2 L_{i+1}^4}{EI^2} \}]$$

$$2\beta = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 EI}{PA L^2} \{ -\frac{1}{f_1} \{ \frac{1}{f_1} - 2 \frac{P_i}{L_i} \} - \frac{1}{f_2} \{ \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} \} \}, \quad f_0 = \frac{2\alpha}{L_i} \frac{1}{\alpha} \int_0^1 X_i^2 dx_i, \quad f_1 = \frac{2\alpha}{L_i} \frac{1}{\alpha} \int_0^1 X_i X_i''' dx_i, \quad f_2 = \frac{2\alpha}{L_i} \frac{1}{\alpha} \int_0^1 X_i X_i'' dx_i, \quad f_3 = \frac{2\alpha}{L_i} \frac{1}{\alpha} \int_0^1 X_i^2 dx_i$$

$$f_4 = \frac{2\alpha}{L_i} \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (X_i^3 + 2X_i X_i' X_i'' - 2X_i^2 X_i''') X_i dx_i, \quad \alpha_i = L_i/L, \quad \gamma: \text{はりの断面2次半径}$$

さらに、軸力は式(2)から次のようにえられる。

$$\frac{P_i}{EI} = \frac{P_i^0}{EI} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_i}{L_i} f_0 F^2 \quad (12)$$

初期条件と $y(x, 0) = \alpha X(x)$, $\dot{y}(x, 0) = 0$ (13) とすればFに関して次のごとく表わしうる。

$$F(0) = 1, \quad \dot{F}(0) = 0 \quad (14) \quad \text{式(14)の初期条件を考慮のうえ式(11)と一回積分すればFに関する次式がえられる。}$$

$\frac{E}{\beta} = -\{ (\frac{\alpha}{\beta} + F^2) F - (\frac{\alpha}{\beta} + 1) \}$ (15) 式(15)の解は楕円積分で表わされるが、 α/β の値によって異なった
式形となり、次の5種類に分かれる。

$$\text{① } \alpha/\beta > -1, \quad \text{② } -2 < \alpha/\beta < -1, \quad \text{③ } \alpha/\beta < -2, \quad \text{④ } \alpha/\beta = -1, \quad \text{⑤ } \alpha/\beta = -2 \quad (16)$$

$\alpha/\beta \geq 0$ は P_i/R_i (R_i : 座屈荷重) ≤ 1 に対応すること、および $\alpha/\beta = 0$ で $P_i/R_i < 1$ の場合には $\alpha/\beta = \infty$, $P_i/R_i = 1$ の場
合には $\alpha/\beta = -1$ なる極限値を示すことが数値的に確認されるが、本論文では $\alpha/\beta \geq -1$ したがって $P_i/R_i \leq 1$
なる場合の振動のみを取扱うこととする。

$\alpha/\beta > -1$, $P_i/R_i \leq 1$ の場合: 式(15)の解はJacobiのm関数を用いて次のごとく表わされる。

$$F = c n (\lambda \sqrt{2\beta + \alpha}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\alpha/\beta}} \quad (17) \quad \text{ここに } \frac{1}{\sqrt{2+\alpha/\beta}} = 1/\left\{2 + \left[\frac{f_1}{f_2} \left\{1 + 2\frac{P_0^2}{EI} + 3\frac{P_0^2}{EI} \left(\frac{P_0^2}{EI}\right)\right\} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI}\right)\right)\right]\right\} \cdot \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha}{f_1} \left\{-\frac{f_1}{f_2} - 2\frac{f_1}{f_2}\right.\right.$$

$$\left.\left(\frac{f_1}{f_2} - \frac{f_1}{f_2}\right)\right\}\right] \quad \text{楕円積分の母数} < 1 \quad (18)$$

cn関数は $4K (K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha/\beta \sin^2 \theta}})$ の周期をもつから、この場合の振動数 V^* は次式で与えられる。

$$V^* = \sqrt{2\beta + \alpha} / 4K \quad (19) \quad \text{また軸力 } P \text{ の変動は式(12)に式(17)を代入することによって次のごとく与えられる。}$$

$$\frac{P_0^2}{EI} = \frac{P_0^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f_1^2} c n^2 (\lambda \sqrt{2\beta + \alpha}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\alpha/\beta}} \quad (20)$$

式(19)の振動数 V^* と軸力が作用しない場合の連続ばりの線型振動における振動数 $V_0 = \frac{\pi}{2K} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^2}}$ との比を求めれば、振動数 V^* に及ぼす各種パラメーターを無次元化することができ、次式をうる。

$$\frac{V^*}{V_0} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha}{f_1^2} \left\{ -\frac{f_1}{f_2} - 2\frac{f_1}{f_2} \left(\frac{f_1}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) \right\} + \frac{f_1}{f_2} \left\{ 1 + 2\frac{P_0^2}{EI} + 3\frac{P_0^2}{EI} \left(\frac{P_0^2}{EI} \right) \right\} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI} \right) \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (21)$$

また連続ばりの振動時における最小軸圧縮力 P_m は $F=1$ を式(20)に代入して次のごとく与えられる。

$$\frac{P_m}{P_0} = \frac{P_0}{P_0} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f_1^2} \frac{f_1}{f_2} \quad \text{ただし } g_{cr} = \frac{P_{cr}^2}{EI} \quad (22)$$

式(21)から明らかに、ばりの細長比 l/r が極めて大きい場合は、 g_{cr} を含む項は微小となりこれを省略するが、このことは有限変形の影響を無視することを意味する。すなわち、かかる場合の振動数を V とすれば、 V は式(21)から次式のごとく求められる。

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha}{f_1^2} \left\{ -\frac{f_1}{f_2} - 2\frac{f_1}{f_2} \left(\frac{f_1}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) \right\} + \frac{f_1}{f_2} \left\{ 1 + 2\frac{P_0^2}{EI} + 3\frac{P_0^2}{EI} \left(\frac{P_0^2}{EI} \right) \right\} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI} \right) \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (23) \quad \text{なお、式(18)における } K \text{ の母数も次のごとく簡単な内容となる。}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\alpha/\beta}} = 1/\left\{2 + 4\frac{\alpha}{f_1^2} \left(-\frac{f_1}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) \right\}^{1/2} \quad (24)$$

式(23)に求めた V を用いて式(21)を書きかえれば次式をうる。

$$\frac{V^*}{V_0} = \frac{V^*}{V} \cdot \frac{V}{V_0} \quad (25)$$

$$\text{ここに } \frac{V^*}{V} = \frac{K(23)}{K(21)} \left\{ \frac{1 + \frac{P_0^2}{EI} \left(\frac{f_1}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \right) + \frac{f_1}{f_2} \left\{ 2\frac{P_0^2}{EI} + 3\frac{P_0^2}{EI} \left(\frac{P_0^2}{EI} \right) \right\} + \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{P_0^2}{EI} \right) \right\}}{-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f_1^2} \frac{f_1}{f_2} + \frac{f_1}{f_2} + \frac{P_0^2}{EI}} \right\}^{1/2} \quad (26)$$

式(25)における V/V_0 は l/r には無関係で、有限変形の影響は V^*/V によって示されることとなる。

$\alpha/\beta = -1$, $P_{cr} = 1$ の場合； 本例は $g_{cr} = 0$ の時のみに生ずる特別の場合で、ばりのオイラー座屈に対応する。この時、楕円関数 cn の母数 $\frac{1}{\sqrt{2+\alpha/\beta}} = 1$ となるゆえ、式(17)は次のごとく書きかえられる。

$$F = \pi c n h(\beta x) \quad (27) \quad \text{式(27)より明らかに、} F \text{ は周期関数ではなく、したがって振動数は } 0 \text{ である。}$$

軸力 P は式(20)に $\alpha/\beta = -1$ を代入して次のごとく与えられる。

$$\frac{P_0^2}{EI} = \frac{P_0^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f_1^2} \pi c n^2 h(\beta x) \quad (28)$$

3. 計算例 図-2(a),(b)に示すごとく両端で単純支持および固定支持をえる等長入パン連続ばりの一次振動についてその特性計算を行なえば、次のごとくである。

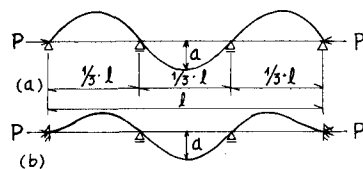


図-2

(a). 両端単純支持入パン連続ばり：一次振動は支点において節を生ずる正弦波形で表わされるゆえ、規準関数は初期軸力 P_0 の大きさに無関係な次式で与えられる。

$$X_1 = \pi c n \pi f_1 \quad (29) \quad \text{ここに、} \lambda = 3\pi \sqrt{1 - g_{cr}}, \quad g_{cr} = 9\pi^2, \quad V_0 = \frac{9\pi^2}{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^2}}$$

したがって、本例の $f_1 (j=0, 1, \dots, 4)$ は P_0 の大きさに無関係に容易に決定される。

(b). 両端固定入パン連続ばり：本例の g_{cr} および V_0 は既往の結果から次のごとく与えられる。

$$g_{cr} = 3^2 \cdot 3.87570^2, \quad V_0 = \frac{3^2 \cdot 3.5564^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^2}} \quad (30) \quad \text{また、任意の } P_0 \text{ に対して式(10)の3連モーメント式から、}$$

固有値 λ_1 および M_1 を求め、それらを式(5)に代入すれば、本例の規準関数 X_1 がえられ、それを正規化のうえ、これを用いて式(11)の f_1 がえられる。

図-3(a),(b)は上記2例について振動時の軸力の変動範囲を求めたもので、単純支持の場合が、固定に

比較して大きな軸力の変動で振動することがわかる。また、前述のように、単純支持の場合には f_0 は P_0 に無関係であるが、 P_0/P_{cr} と P/P_{cr} との関係は直線となる(図-3(a))。固定の場合には P_0 の変化に対して、 f_0 は増加するが、その変化は極めて小さく、これまた P_0/P_{cr} と P/P_{cr} の関係はほぼ直線とみなすことができる(図-3(b))。

式(23)から振動数比 V/V_0 と軸力比 P/P_{cr} の関係を振幅比 q/r をパラメーターにとり図示すれば、図-4(a),(b)のごとくえられる。 V/V_0 は振幅の増大にともなって増加し、 P/P_{cr} の増大にともなって減少することがわかる。また、 V/V_0 に及ぼす振幅の影響は固定の場合よりも単純支持の場合が大きく現われている。式(26)の有限変形の影響を表わす量 V/V_0 の算定結果を図-5(a),(b)に示す。はりの細長比 q/r が小さくなるに従って、有限変形の影響が顕著に現われている。また、軸力の影響項 V/V_0 とは逆に、有限変形の影響項 V/V_0 は単純支持よりも固定の場合の方が大きくなる。

4. 結語 式(1)の誘導に際しては有限変形を考慮に入れた運動方程式を簡略化するための仮定(II)が入っており、その誤差が含まれ、ために図-5(a),(b)で $q/r=0$ の時、 $P/P_{cr}=1$ で V/V_0 が ∞ となっている。これは $P/P_{cr}=1$ で V^* がわずかの値をもつことを意味する。なお、式(11)に含まれる f_0 の数値積分は Simpson の積分公式を用いて行なった。

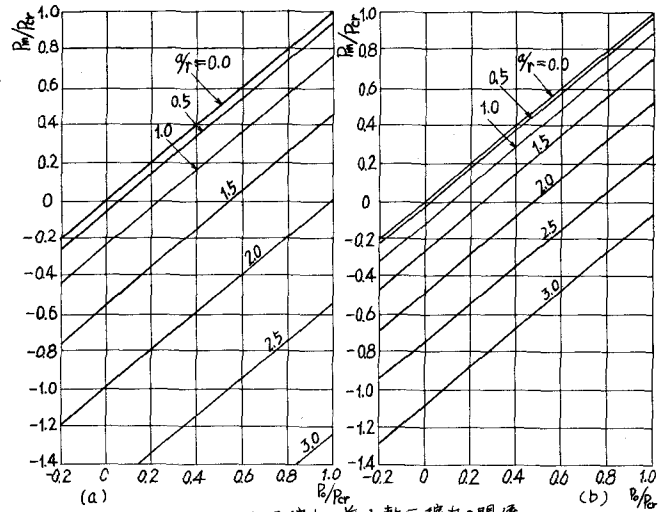


図-3 初期軸圧縮力と最小軸圧縮力の関係

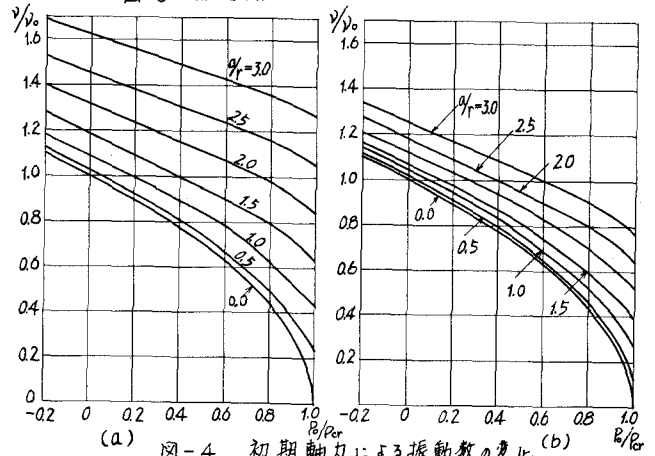


図-4 初期軸力による振動数の変化

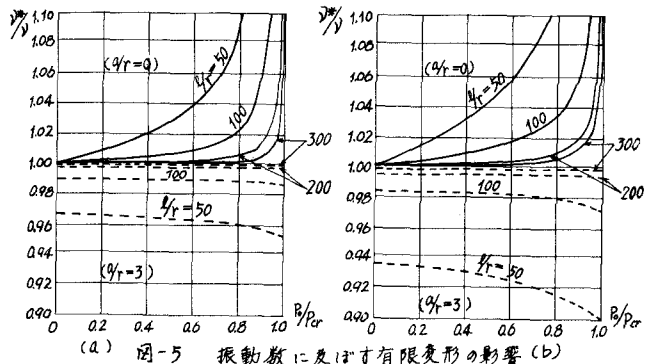


図-5 振動数に及ぼす有限変形の影響

参考文献: 1) 吉村・植村: 棒の横振動に於ける振幅の影響, 東京大学工学研究所報告, 第2巻, 第3, 4号(1948.3.4), 2) J.G. Easley: Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular plates, ZAMP, vol. 15, (1964), 3) 佐藤: 両端固定はりおよび一端固定, 他端単純支持はりの非線形自由振動, 日本機械学会論文集, 第34巻, 第259号(昭和43年3月), 4) 例えば, D. Burgeen: Free Vibrations of pin Ended Column With Constant Distance Between pin Ends, J. Appl. Mech., 18-2, (1951.6)