

東京都立大学大学院 学生員 国井隆弘

1 まえがき

復元力の非線型性に伴う非線型振動について、1質点系 或いは2質点系に関する研究は多い。しかしながら多質点系、特に曲げ振動系について筆者の知る限りではあまり研究されていないようである。ここでは非線型振動に關しての、曲げとセン断振動系の違いを明らかにし、曲げ振動系について多質点系の運動方程式を立てることを試みた。

2 セン断振動系と曲げ振動系

多質点系の運動方程式は減衰力を無視すれば一般に

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \quad (1)$$

で与えられる。ここで行列 $[k]$ を問題とすれば、セン断系の場合、行列 $[k]$ は質点間の相対変位とセン断力の関係から決定されるため、行列 $[k]$ の或る要素 k_{ij} が或る限界を越えたセン断力のため k_{ij} に変化したとしても k_{ij} の代りに k'_{ij} を行列 $[k]$ に挿入すればよい。しかしながら曲げ系では行列 $[k]$ は一般に影響係数行列の逆行列として求められる関係上、曲げ剛さ等が受ける曲げモーメント或いはたわみと線型を保たない場合、求めることができない。

3 非線型振動モデル

梁構造などの曲げ部材のたわみ曲線の一部を図-1に示してあるが、ここでAおよびB点における接線間の角は次式で与えられる。

$$\phi = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (2)$$

どうしてもEIが何らかの非線型性のもとに変化した場合、これを ϕ の変化でもって表現できると考えられる。この考えに基づいて図-2に示すような振動モデルを考える。ここで構造物は無質量の剛棒と質量のある回転ヒンジとから構成され、そのヒンジの回転は曲げモーメントと関係づけられ、その一例は図-3に示してある。

4 運動方程式

或る基準質点からの質点の変位は図-2、図-3から一般に次式で与えられる。

$$\{x\} = [L]\{\phi\} \quad (3)$$

ここで行列 $[L]$ は質点間の距離で構成される行列だが構造物によっては異なるもので、例えば図-4のような桁橋では左端の支点を基準点とすれば式(4)で与えられ、また図-5のような塔状のものでは固定端を基準にして式(5)で与えられる。

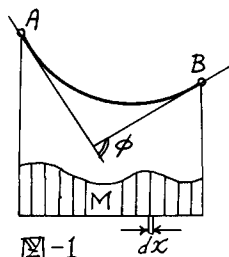


図-1

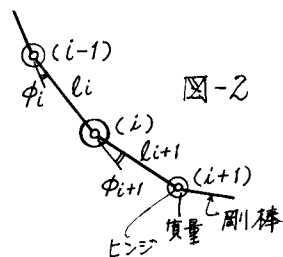
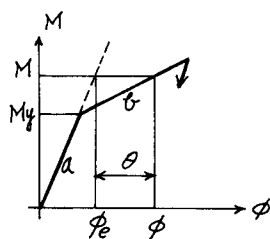


図-2



a, θ は直線の傾き

図-3

$$[l] = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & - \\ l_1 + l_2 & -l_2 & 0 & - \\ l_1 + l_2 + l_3 & -(l_2 + l_3) & -l_3 & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[l] = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & - \\ l_1 + l_2 & l_2 & 0 & - \\ l_1 + l_2 + l_3 & l_2 + l_3 & l_3 & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \quad (5)$$

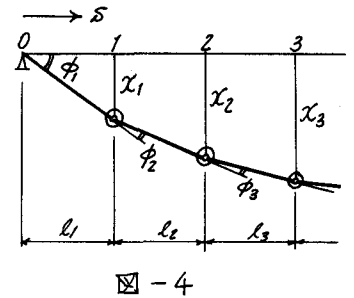


図-3から $\phi = \phi_2 + \theta$ (6)

ここで $\theta = (M - M_y)/R$, $R = a \cdot b / (a - b)$ (7)

式(6)を式(3)に代入して

$$\{x\} = [l]\{\phi_2\} + [l]\{\theta\} \quad (8)$$

ところで式(8)の右辺第二項を取り出して

$$\{y\} = [l]\{\phi_2\} \quad (9)$$

とすれば、これは従来の荷重と変位の関係式

$$\{y\} = [\delta]\{P\} \quad (10)$$

と等しく復元力は式(10)から求められる。

式(8),(9),(10)を式(1)に代入して整理すれば 次式が運動方程式として得られる。

$$[m]\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = \{F\} - [m][l]\{\ddot{\theta}\} \quad (11)$$

式(11)の解法としてモーダルアナリシスを用いるならば、式(12)を式(11)に代入し、整理すれば 図-4 の場合に任意荷重 $F(t, s)$ が作用するとき、及び 図-5 で水平地動変位 $\ddot{x}(t)$ が作用するときに対して、それぞれ式(13)、式(14)が得られる。

$$\{y\} = \sum_j \{Y_j\} \xi_j \quad (12)$$

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = \frac{1}{M_j} \{Y_j\}^T \{F(t, s)\} - \frac{1}{M_j} \{Y_j\}^T [m][l]\{\ddot{\theta}\} \quad (13)$$

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = -\frac{1}{M_j} \{Y_j\}^T [m]\{\ddot{x}(t)\} - \frac{1}{M_j} \{Y_j\}^T [m][l]\{\ddot{\theta}\} \quad (14)$$

ここで

$$\omega_j^2 = K_j / M_j, \quad K_j = \{Y_j\}^T [k]\{Y_j\}, \quad M_j = \{Y_j\}^T [m]\{Y_j\} \quad (15)$$

5 考察

曲げ振動系の運動方程式が式(11)で与えられたが、ここで非線型の特性は荷重項に回転角の加速度として加えることで表現できた。非線型振動問題は構造物の復元力特性の把握をはじめ多くの問題点が残されていると思われるが、この研究の範囲内での問題点として 1) 非線型部分が構造物の中に生じている範囲と焦点間間隔の関係 2) 過大変位の発生による理論の誤差及び重力加速度の影響 — が考えられ、これを今後の研究としたい。

なを、この研究を進めるにあたり、始終懇切な指導をいただいた奥田秋夫教授に深く感謝するとともに、多大な援助を下った研究室の皆様にも心から感謝します。