

九州大学工学部 正 員 小 坪 清 真  
同 大学院 学生員 O 川 人 達 男

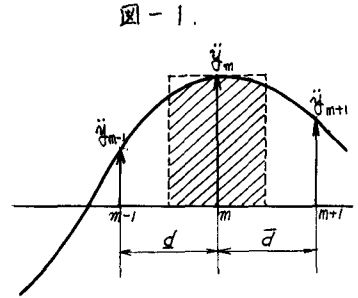
### 1. まえがき

橋梁その他構造物の形状が複雑な場合に、構造物の固有振動周期を算定するに用いられる多質点系置換法は、その方法が簡単で、ほとんどあらゆる種類の構造物に適用できるので広く利用されている。

しかし、この方法は無数の質点をもつ構造物を有限個の質点に置き換えたものであるから、質点数を適当に増減することによって精粗どのようにでもできるとはいえ、高次の固有振動周期を求める場合には質点数を余程多く採らないと誤差が大きくなる。本論文は従来用いられている多質点系置換法において生ずる誤差の原因を述べ、これらの誤差の原因を除いた方法を示し、2～3の計算例を上げて著者の方法の妥当性を示したものである。

### 2. 多質点系置換法における誤差の原因

(1) 慣性力を過大に評価していること。図-1.に示すように、質点 $m$ で代表される慣性力は区間 $(d+d)/2$ 内の斜線をほどこした部分で表わされるべきであるが、従来の多質点系では図の点線で表わされる慣性力を採っている。すなわち、区間 $(d+d)/2$ 内の全重量が $m$ 点と等しい加速度をもつとしている。この原因による誤差は明らかに固有振動数を厳密解より減少せしめる。



(2) 分布慣性力を集中慣性力とみなしていること。

図-1.より明らかなように、区間 $(d+d)/2$ 内に分布している慣性力を質点 $m$ に集中していると見なすことは、慣性力の大きさとは同じであっても、系の撓みと実際より過大に算出することになる。この原因による誤差は固有振動数を厳密解より減少せしめる。

(3) 撓み曲線を有限個の座標で表わすことが困難なこと。

実際の撓み曲線を表わすには、無限の質点を採用しなければならないが、これを有限個の質点で表わせば実際の撓み曲線よりかなり歪んだ曲線しか得られない。したがって、この原因による誤差は系の固有振動数を増大せしめる。

これら原因による誤差は質点の数、求める振動次数によってその大きさが異なるので、原因(1),(2)の影響が大きく原因(3)の影響が小さい場合には、厳密解より小さい固有振動数が得られ、逆に原因(3)の影響が原因(1),(2)より大きい場合には、厳密解より大きい固有振動数が得られる。また、原因(1),(2)と(3)の影響が同程度である場合には、誤差は互に打ち消され、固有振動数は厳密解に近く、見掛上、精密な計算法のように見える。

表-1. 両端支持梁に対する計算値

| 次数<br>質点数 | 1次    | 2次    | 3次    |
|-----------|-------|-------|-------|
| 1         | 0.701 | —     | —     |
| 2         | 0.992 | 0.701 | —     |
| 3         | 0.998 | 0.967 | 0.701 |

表-1.は質点数をいろいろ変えて従来の方法によ

り両端支持梁の固有振動数を求め、厳密解に対する比を示したものである。表からみると、質点数と同じ次数の固有振動数は厳密解よりかなり小さいものが得られるが、質点数より小さい次数の固有振動数は比較的良好な近似値が得られる。しかし何れも原因(1),(2)が原因のより大きい誤差を生じ、厳密解より小さい固有振動数が得られている。

図-2.に誤差の原因を明らかにするために描かれた振動型の厳密解と質点の位置および慣性力(点線)を示したもので、何れの場合にも慣性力が実際より過大に見積られ、原因(3)をカバーしていることがわかる。

### 3. 振動方程式の誘導

採用する質点数を増加しないで、多質点系置換法の精度を向上させるには、誤差の原因を取りのぞくような方法を用いればよい。

#### (1). 撓み曲線の近似(原因(1)の除去)

構造物の振動中における撓み曲線は一般に高次の曲線であるが、今、図-3.に示すように、区分点 $(m-1), m, (m+1)$ の3点間には2次の放物線であると仮定すると、 $m$ 点を座標原点にとれば、 $x$ 点の撓みは3点の変位 $y_{m-1}, y_m, y_{m+1}$ を用いて次のように表わされる。

$$y(x) = y_m + \frac{(\bar{d}^2 - d^2)y_m - \bar{d}^2 y_{m-1} + d^2 y_{m+1}}{d\bar{d}^2 + \bar{d}d^2} x + \frac{-(\bar{d} + d)y_m + \bar{d}y_{m-1} + dy_{m+1}}{\bar{d}d^2 + d\bar{d}^2} x^2 \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $d, \bar{d}$ は区分点の間隔である。

#### (2). 変位係数の近似(原因(2)の除去)

振動中における慣性力は分布荷重である。したがって、 $m$ 点の両側 $(d + \bar{d})/2$  区域内の慣性力を $m$ 点に集中させないで、分布荷重として取り扱うには、図-4.に示すように、区分点 $(m-1), m, (m+1)$ 、3点に作用する単位荷重の $n$ 点に及ぼす変位 $\alpha_{n(m-1)}, \alpha_{nm}, \alpha_{n(m+1)}$ を用い、この区域内の変位係数を近似的に表わせばよい。この区域内の変位係数は実際には高次の曲線であるが、近似的に2次曲線と考えると、 $x$ 点の単位荷重が $n$ 点に及ぼす変位すなわち変位係数は次式で表わされる。

$$\alpha_{nx} = \alpha_{nm} + \frac{(\bar{d}^2 - d^2)\alpha_{nm} - \bar{d}^2 \alpha_{n(m-1)} + d^2 \alpha_{n(m+1)}}{d\bar{d}^2 + \bar{d}d^2} x + \frac{-(\bar{d} + d)\alpha_{nm} + \bar{d}\alpha_{n(m-1)} + d\alpha_{n(m+1)}}{d\bar{d}^2 + d\bar{d}^2} x^2 \quad \text{----- (2)}$$

図-2. 慣性力の過大評価

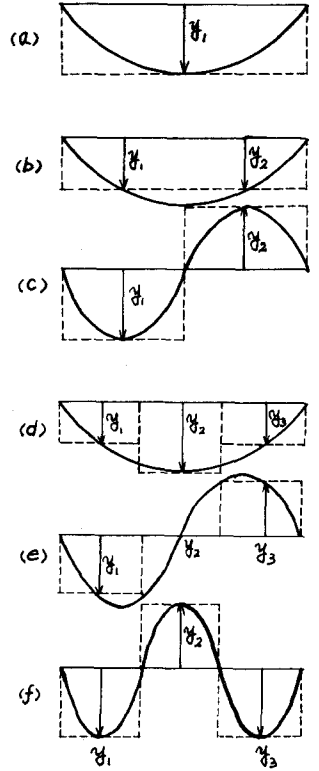


図-3. 撓み曲線

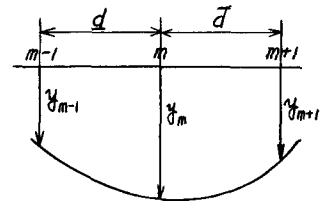
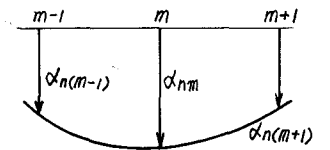


図-4. 変位係数曲線



$m$  点を中心に左右  $(\bar{d} + d)/2$  の区間の分布慣性力が  $n$  点に及ぼす変位は、(1)式と(2)式を用い、次式で表わされることになる。

$$y_{nm} = \int_{d/2}^{\bar{d}/2} \frac{w}{g} \ddot{y}(x) \cdot \alpha_{nx} dx \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $w$  は構造物の単位長当りの重量、 $g$  は重力加速度である。多質点系へ置換しなければならぬような構造物では、 $w$  は一般に  $x$  の函数であるが、 $m$  点の両側の平均を用いれば近似値が得られる。また、区分長  $\bar{d}$ 、 $d$  も一般には左右等しくなく、今ここでは簡単のため  $m$  点の左右で等しいものとみなして (3) 式の積分を行い、 $w(\bar{d} + d)/2 = W_m$  として (3) 式を書き変えると、結局次の式が得られる。

$$\begin{aligned} y_{nm} = & -\frac{W_m}{g} \left[ \ddot{y}_m \left\{ \frac{203}{240} \alpha_{nm} + \frac{17}{480} \alpha_{n(m-1)} + \frac{17}{480} \alpha_{n(m+1)} \right\} \right. \\ & + \ddot{y}_{m-1} \left\{ \frac{17}{480} \alpha_{nm} + \frac{23}{960} \alpha_{n(m-1)} - \frac{17}{960} \alpha_{n(m+1)} \right\} \\ & \left. + \ddot{y}_{m+1} \left\{ \frac{17}{480} \alpha_{nm} - \frac{17}{960} \alpha_{n(m-1)} + \frac{23}{960} \alpha_{n(m+1)} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

(4)式の右辺の [ ] 内を  $\ddot{y}_{nm}$  とおけば、 $n$  点の変位は次式で表わされる。 $g$  は質点の数である。

$$y_n = - \sum_{m=1}^g \frac{W_m}{g} \ddot{y}_{nm} \quad (n = 1, 2, \dots\dots g) \quad \dots\dots\dots (5)$$

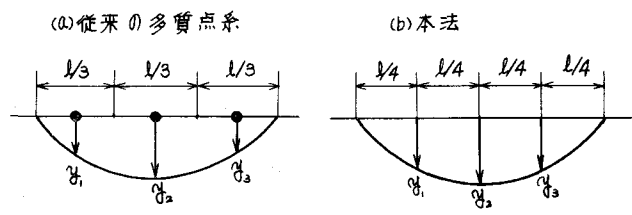
(5)式は振動方程式である。 $g$  個の方程式より  $g$  個の固有振動数が得られる。さらに、各点の重量  $W_m$  が余り相異なる場合には近似的に次式を用いてもよい。すなわち、(4)式をすべての点で立てることにより、次の近似的な振動方程式が得られる。

$$y_n = - \sum_{m=1}^g \frac{W_m \ddot{y}_m}{g} \left[ \frac{143}{160} \alpha_{nm} + \frac{17}{240} \{ \alpha_{n(m-1)} + \alpha_{n(m+1)} \} - \frac{17}{960} \{ \alpha_{n(m-2)} + \alpha_{n(m+2)} \} \right] \quad \dots\dots (6)$$

(6)式は一般内点について成立するが、境界に近い点では修正されなければならない。しかし、(6)式をそのまますべての点について用いても誤差は僅小である。(6)式の [ ] 内のオ1項  $\alpha_{nm}$  の係数を1とし、他の項を無視したのが従来用いられている多質点系置換法である。したがって(6)式は、 $m$  点の変位係数を  $m$  点の近傍の変位係数を用いて僅かに修正すべきことを示している。

従来の方法では、区分長  $d$  の中心に質量が集中していると見なして、この質点の変位を未知量に採ったのであるが、本法では、質量が集中していると

図-5. 区分法



は見なす、分布したまゝ振動方程式を立てたものであるから、境界を含め、その区分点の変位を未知量に採用することができる。

#### 4. 計算例

表-2は、両端支持梁の固有振動数を、区分数をいろいろ変えて本法により計算し、厳密解に対する比で表わしたものである。従来の多質点系置換法による計算結果(表-1.)と比較すれば明らかなように、高次の振動数に対して良好な近似値が得られることがわかる。固有振動数が厳密値より大きくでているのは、先に述べた原因(3)による誤差が原因(1),(2)による誤差より大きいためである。

表-3は、両端固定梁に対する計算値で厳密値に対する比で示してある。両端支持梁の場合より精度は劣るが、従来の多質点系置換法に比較して非常によい近似値が得られる。

#### 5. 結語

たわみ曲線、変位係数曲線の両方を共に考慮することにより、集中質点系の誤差の原因をいくらかでも除き得たのであるが、計算例が簡単な梁についてだけであり、一般の構造物に対する計算をさうに行ってみる必要がある。理論的な面だけからいえば、たわみ曲線および変位係数曲線に高次の曲線を用いることにより、区分数を増さないでさうによい近似を与えることも可能であるが、いたづらに計算が煩雑となり、却って本法の特色が失われる。

本法を自由端をもつ梁に適用するには、理論的なお問題がある。これについては目下研究中である。

表-2. 両端支持梁の固有振動数  
(厳密値に対する比)

| 区分数 \ 次数 | 1次    | 2次    | 3次    |
|----------|-------|-------|-------|
| 1        | 1.048 | —     | —     |
| 2        | 1.016 | 1.065 | —     |
| 3        | 1.006 | 1.038 | 1.082 |

表-3. 両端固定梁の固有振動数  
(厳密値に対する比)

| 区分数 \ 次数 | 1次               | 2次           | 3次 |
|----------|------------------|--------------|----|
| 1        | 0.927<br>(0.619) | —            | —  |
| 2        | 1.001<br>( )     | 0.915<br>( ) | —  |
| 3        |                  |              |    |

{ ( )内は従来の方法による計算値 }