

1. まえがき 地震力や風力のように時間的に不規則に変動し、しかも将来そのまゝの形で再現されない外力に対する構造物の挙動を解明するためには、不規則振動論の立場から問題を取り扱うことが妥当である。不規則外力に対する設計法を確立するためには、構造物の非破壊確率を求めることが重要であり、著者らは、たとえば従来の弾性設計法のように、最大応答量の許容値を設定する場合に構造物の非破壊確率を表わす最大応答の確率分布について研究を進めており、その結果の一部をすでに報告した(1,2)。動的な外力による構造物の破壊は最大応答のみで一義的に定まるものではなく、くり返し載荷による破壊の進行に対しても十分な考慮が払われるべきと考えられる。本研究は、このような観点から、不規則外力を受ける構造物の応答が一定レベルを超える回数の確率統計的性質について論じたものである。

2. 基本解析

対象とする構造物の応答を $y(t)$ とし、継続時間 T の間に $|y(t)|$ が Y を超える回数を論ずる。はじめに、図-1のように、 $|y(t)|$ が $(0, t)$ で Y を $n-1$ 回超過し、かつ n 回目の超過が $(t, t+dt)$ で生ずるという事象を $R_p(n, Y, t)$ で表わすものとし、これをを用いて $p_n(Y, t)$, $\tilde{p}_n(Y, t)$ なる条件付確率密度関数を次式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} p_n(Y, t) dt &= P[R_p(n, Y, t) | y(0) \leq Y] \\ \tilde{p}_n(Y, t) dt &= P[R_p(n, Y, t) | y(0) > Y] \end{aligned} \right\} \text{----(1)}$$

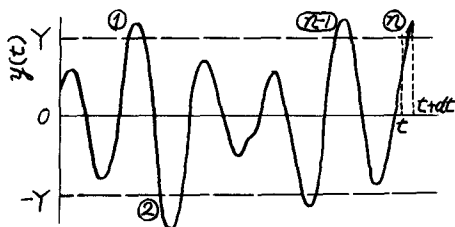


図-1 不規則外力に対する構造物の応答の概念図 (①は、 $|y(t)|$ が n 回目に Y を超えることを示す。)

式(1)の $p_n(Y, t)$, $\tilde{p}_n(Y, t)$ は、first-passage-time probability density の概念を拡張したもので、 n th-passage-time density と呼ぶことにある。それらを用いると、応答の継続時間 T 内で $|y(t)|$ が Y を n 回超える確率 $\pi_n(Y, T)$ は次式により表わされる。

$$\pi_n(Y, T) = \begin{cases} a_0(Y) \left\{ 1 - \int_0^T p_1(Y, t) dt \right\}, & (n=0) \\ a_0(Y) \left\{ \int_0^T p_1(Y, t) dt - \int_0^T p_2(Y, t) dt \right\} + \tilde{a}_0(Y) \left\{ 1 - \int_0^T p_1(Y, t) dt \right\}, & (n=1) \\ a_0(Y) \left\{ \int_0^T p_n(Y, t) dt - \int_0^T p_{n+1}(Y, t) dt \right\} + \tilde{a}_0(Y) \left\{ \int_0^T \tilde{p}_{n-1}(Y, t) dt - \int_0^T p_n(Y, t) dt \right\}, & (n \geq 2) \end{cases} \text{----(2)}$$

ただし、 $a_0(Y) = P[|y(0)| \leq Y]$, $\tilde{a}_0(Y) = 1 - a_0(Y) = P[|y(0)| > Y]$

したがって、 T 内での超過回数が n 以下となる確率、すなわち応答レベル Y を超える回数 n の確率分布を $\pi_p(n; Y, T)$ とすると、

$$\mathbb{E}_p(n; Y, \tau) = \sum_{v=0}^n \mathbb{E}_v(Y, \tau) = \begin{cases} a_0(Y) \{1 - \int_0^\tau p_1(Y, t) dt\} & , (n=0) \\ 1 - \{a_0(Y) \int_0^\tau p_{n+1}(Y, t) dt + \tilde{a}_0(Y) \int_0^\tau \tilde{p}_n(Y, t) dt\} & , (n \geq 1) \end{cases} \quad (3)$$

3. $p_n(Y, \tau), \tilde{p}_n(Y, \tau)$ の誘導

時間軸上の $(0, \tau)$ を $t_i = i\Delta t$, $(i=0, 1, 2, \dots, m; \Delta t = \tau/m)$ によって m 個の区間に分割する。区間 (t_{i-1}, t_i) で $|y(t)|$ がレベル Y を超えるという事象を e_i , $|y(0)| \leq Y$ なる事象を g_0 , それらの余事象をそれぞれ $\bar{e}_i, \bar{g}_0$ とすると, $p_n(Y, \tau)$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} p_n(Y, \tau) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P \left[\bigcup_{i_1=1}^{m-1} \bigcup_{i_2=i_1+1}^{m-2} \dots \bigcup_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{m-n} \bar{e}_{i_1} \bar{e}_{i_2} \bar{e}_{i_3} \dots \bar{e}_{i_{n-1}} e_{i_{n-1}} \bar{e}_{i_{n-1}+1} \dots \bar{e}_{m-1} e_m | g_0 \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P \left[\bigcup_{i_1=1}^{m-1} \bigcup_{i_2=i_1+1}^{m-2} \dots \bigcup_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{m-n} (1-e_{i_1})(1-e_{i_2}) \dots (1-e_{i_{n-1}})(1-e_{i_{n-1}+1}) \dots (1-e_{i_{n-1}})(1-e_{i_{n-1}+1}) \dots (1-e_{m-1})e_m | g_0 \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \binom{m-1}{n-1} \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \dots \int_{t_{n+m-3}}^\tau f_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_{n+m-2}, t) dt_{n+m-2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } f_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = P \left[\bigcap_{i=1}^n \{ |y(t_i)| \leq Y | y(t_i + dt_i) | > Y \} | g_0 \right]$$

同様に,

$$\tilde{p}_n(Y, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \binom{m-1}{n-1} \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \dots \int_{t_{n+m-3}}^\tau \tilde{f}_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_{n+m-2}, t) dt_{n+m-2} \quad (5)$$

$$\tilde{f}_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = P \left[\bigcap_{i=1}^n \{ |y(t_i)| \leq Y | y(t_i + dt_i) | > Y \} | \bar{g}_0 \right]$$

4. 再生過程による近似解

前節までに得られた結果は厳密解であるが, 式(4), (5)で $f_s, \tilde{f}_s$ の次元数は無限大まで必要であり, 構造物の応答のように相異なる時刻間の相関の強い確率過程では, それらの数値解を求めることは不可能に近い。ここでは近似解を得るために, 次のような二つの仮定を行なう。(1) $y(t)$ を定常過程とする。(2) 図-1 において $|y(t)|$ が Y を n 回目に超過する時刻はそれ以前の超過回数およびそれらが生じた時刻と独立ではないが, いまこれを, $n-1$ 回目の超過の時刻のみに影響されるものとする。すなわち, $|y(t)|$ が Y を超過する過程は再生過程を構成するものと考え³⁾。

これらの仮定により $f_s, \tilde{f}_s$ は次式のように表わされる。

$$f_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_s(Y; t_1) \prod_{i=1}^{n-1} f_c(Y; t_{i+1} - t_i), \quad \tilde{f}_s(Y; t_1, t_2, \dots, t_n) = \tilde{f}_s(Y; t_1) \prod_{i=1}^{n-1} f_c(t_{i+1} - t_i) \quad (6)$$

ただし,

$$f_c(Y, t) dt = P[|y(t)| \leq Y | y(t+dt) | > Y | y(0) | = Y | y(dt) | > Y]$$

式(6)を式(4), (5)に代入し, Laplace 変換・逆変換を行なえば, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} p_n(Y, \tau) &+ \sum_{v=1}^n \binom{n}{v} \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^\tau p_n(Y, t_1) f_c(Y, t - t_0) \prod_{\mu=1}^{v-1} f_c(Y, t_{\mu+1} - t_\mu) dt_v \\ &= \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \dots \int_{t_{n-2}}^\tau f_s(Y, t_1) f_c(Y, t - t_{n-1}) \prod_{\mu=1}^{n-2} f_c(t_{\mu+1} - t_\mu) dt_{n-1} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(Y, t) + \sum_{\nu=1}^n \binom{n}{\nu} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{\nu-1}}^t \tilde{p}_n(Y, t_1) f_c(Y, t-t_\nu) \prod_{\mu=1}^{\nu-1} f_c(Y, t_{\mu+1}-t_\mu) dt_\nu \\ = \int_0^t dt \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-2}}^t \tilde{f}_s(Y, t_1) f_c(Y, t-t_{n-1}) \prod_{\mu=1}^{n-2} f_c(Y, t_{\mu+1}-t_\mu) dt_{n-1} \quad \text{---- (8)} \end{aligned}$$

このようにして得られた式(7), (8)もあまり簡単な形ではないが, 多重積分はたかたか \$n\$ 重であり, しかも時間軸上で recursive に \$\tilde{p}_n, \tilde{p}_n^*\$ を求めることができるので, 式(4), (5)と比較すれば数値計算ははるかに容易である。また, 式(7), (8)に現われる \$\tilde{f}_s(Y, t), \tilde{f}_s(Y, t), f_c(Y, t)\$ は, threshold-value crossing の問題⁸⁾と適用することにより次式のように表わされる。

$$f_s(Y, t) = \frac{1}{a_0(Y)} \left\{ \int_{-\dot{y}}^{\dot{y}} d\dot{y}(0) \int_0^{\dot{y}(t)} \dot{y}(t) \phi(\dot{y}(0), Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_{-\dot{y}}^{\dot{y}} d\dot{y}(0) \int_0^{\dot{y}(t)} \dot{y}(t) \phi(\dot{y}(0), -Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \right\} \quad \text{---- (9)}$$

$$\tilde{f}_s(Y, t) = \frac{1}{a_0(Y)} \left\{ N_c(Y) - a_0(Y) f_s(Y, t) \right\} \quad \text{---- (10)}$$

$$\begin{aligned} f_c(Y, t) = \frac{1}{N_c(Y)} \left\{ \int_0^{\dot{y}(0)} d\dot{y}(0) \int_0^{\dot{y}(t)} \dot{y}(t) \phi(\dot{y}(0), Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_0^{\dot{y}(0)} d\dot{y}(0) \int_0^{\dot{y}(t)} \dot{y}(t) \phi(\dot{y}(0), -Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \right. \\ \left. + \int_0^{\dot{y}(0)} d\dot{y}(0) \int_0^{\dot{y}(t)} \dot{y}(t) \phi(-Y, -\dot{y}(0), Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_0^{\dot{y}(0)} d\dot{y}(0) \int_0^{\dot{y}(t)} \dot{y}(t) \phi(-Y, -\dot{y}(0), -Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \right\} \quad \text{---- (11)} \end{aligned}$$

$$N_c(Y) = \int_0^{\dot{y}(0)} d\dot{y}(0) \phi(Y, \dot{y}(t)) d\dot{y}(t) + \int_0^{\dot{y}(0)} d\dot{y}(0) \phi(-Y, -\dot{y}(t)) d\dot{y}(t) \quad \text{---- (12)}$$

ただし, \$\phi(\dot{y}(t), \dot{y}(t)), \phi(\dot{y}(0), \dot{y}(t), \dot{y}(t))\$, \$\phi(\dot{y}(0), \dot{y}(0), \dot{y}(t), \dot{y}(t))\$ は, それぞれの変数の同時確率密度関数である。

5. Poisson 過程による近似

式(9)~(11)の \$f_s, \tilde{f}_s, f_c\$ は, いずれも \$t \rightarrow \infty\$ で式(12)の \$N_c(Y)\$ に収束する。\$f_s, \tilde{f}_s, f_c\$ にこの極限值を用いると, \$\tilde{p}_n, \tilde{p}_n^*\$ は容易に次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(Y, t) = \tilde{p}_n^*(Y, t) \\ = \frac{N_c(Y) \{N_c(Y) t\}^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-N_c(Y) t\} \quad \text{---- (13)} \end{aligned}$$

これは構造物の応答が過去の応答経歴に影響されないと仮定するものであり, \$|\dot{y}(t)|\$ が \$Y\$ を超過する過程が Poisson 過程を構成すると考える場合である。

6. 線形/自由度系の応答への適用例

外力として white noise の作用を受ける線形/自由度系の応答に対して前述の解法を適用し, 数値計算を行なった。図-2~5に計算結果を示した。

同図中で, \$T_n\$ は構造物の固有周期, \$\omega_n\$ は固有円

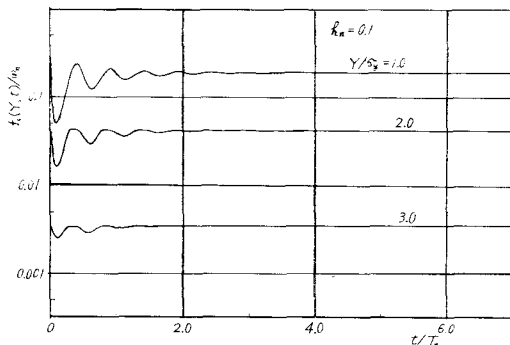


図-2 確率パラメータ - \$f_s(Y, t)\$

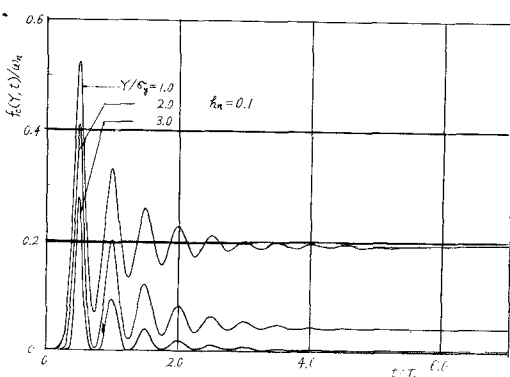


図-3 確率パラメータ - \$f_c(Y, t)\$

振動数, λ_n は減衰定数, δy は $y(t)$ の標準偏差を示す。図-2, 3 は, $f_s(y, t)$, $f_c(y, t)$ の計算結果である。いずれも t が大きくなると初期条件の影響が小さくなり, 一定値に近づくのがわかる。図-4 は, $P_n(y, t)$ を示すが, 同図には, 式(7)の再生過程による計算結果と, より単純化された近似解である式(13)の Poisson 過程による結果をあわせて示した。両者の計算結果にはかなりの差異が認められ, 基本仮定に対する精度の吟味が重要であることがわかる。 $\tilde{P}_n(y, t)$ についても同様の結果が得られた。以上の結果を式(3)に用いて $\Phi_p(n; Y, \tau)$ を求めた結果が図-5 である。同図から, n により, また $Y/\delta y$ によって二つの近似解の精度が異なることがわかる。

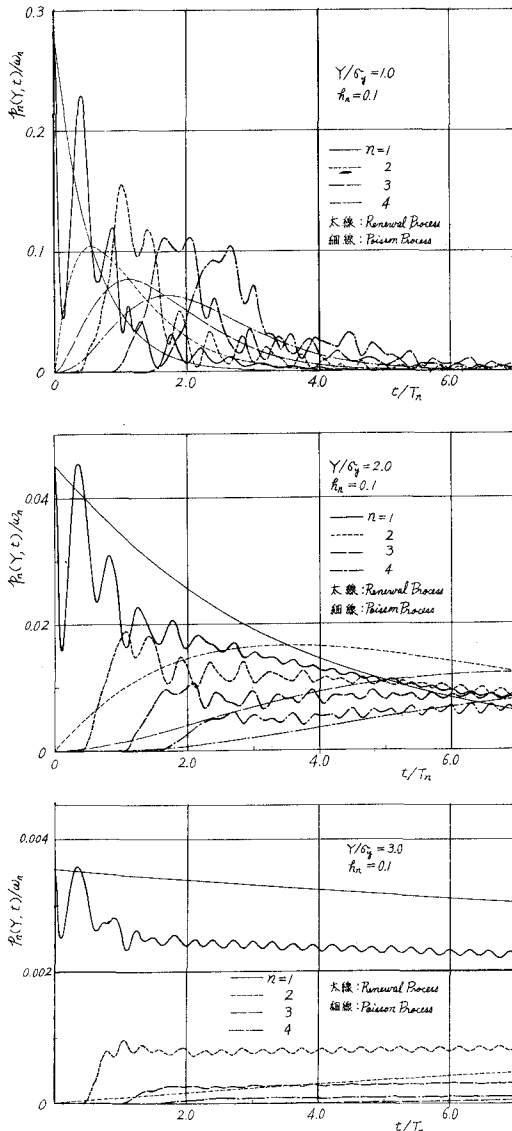


図-4 n th-Passage-Time Probability Density $P_n(Y, t)$

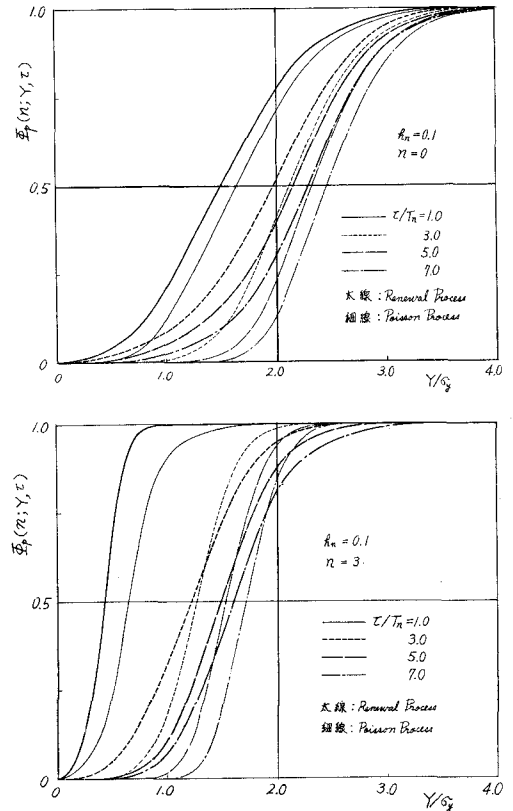


図-5 応答変位が Y と超える回数の確率分布

参考文献

- 1) 後藤・電田：京大防衛研究年報 No. 11A, 昭.43.3.
- 2) 後藤・電田：同上 No. 12A, 昭.44.3.
- 3) Rice & Beer: Jour. Acoust. Soc. Amer. Vol. 39, 1966.
- 4) Wax: Selected Papers on Noise & ..., Dover. 1954.