I-75　境界条件の変化（固定 ⟷ 回転支承）する構造物の固有値を決定する一解析法

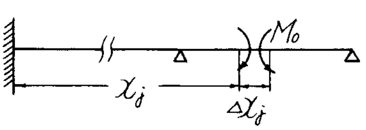
熊本大学工学部　正員　○平井一男
佐藤工業 K.K　古庄憲彦
日本上下水道コンサルタント　森光 伝

まえがき

我々が (1) 始め固定の境界条件を持つと考えて設計した構造物が実際には完全な固定条件でなく，その回転の影響を考慮しなければならない場合，(2) あらかじめその回転支承の剛性が予想できないために，いくつかの剛性を想定しておかなければならない場合などが生じることはしばしば経験するところである。これらの各場合について固有値と固有ベクトルを求めるにさいしてそのおのおののケースについて集中 mass の方法などにより求めることは可能ではあるが，電子計算機の費用とかまたは，それに要する労力などを考慮する必要がある。この研究は，ある任意の剛性をもつ弾性支承の構造物の固有値と固有ベクトルが与えられているならば，それらの値をもとにして上記の境界条件の変化した新しい system に対して固有値と固有ベクトルとを決定する解析法を提案するものである。またこの解析過程からもわかるように，この解析法は構造物の一部が破壊または腐蝕して局部的に曲げ剛性が減少し弾性ヒンジとみなされるような構造物に対しても適用される。

解析理論

図－1に示すように任意の梁構造物に対して曲げ荷重（Δx_j はなれた微小区間に作用する等大逆方向の一対のモーメント荷重 M_0）が作用するとき，その系のレスポンスは式(1)で与えられる。



図－1

$$W = \left[w_{sm} - \sum \Omega_n \Phi_n(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] M_0 \Delta x_j \sin \omega t \qquad (1)$$

ここに $\Omega_n =$

$\Phi_n(x)$: n 次の正規化モード　　x_i : 測定点の座標
ω_n : n 次の固有振動数　　x_j : 荷重点の座標
w_{sm} : 単位の静的曲げ荷重 $M_0 \Delta x_j = 1$ による静的たわみ

式(1)の $M_0 \Delta x_j$ で定義される外力を上記の曲げ荷重とよび，これを記号 $\mathfrak{m}$ にて表わすことにする。その物理的意味は図－1に示されるものであり，これは従来の外力とは異なった意味を持つ新しい外力である。

式(1)で $\sin \omega t = 1$ の場合を考え，$\mathfrak{m}$ の記号を使用すれば式(2)となる。

$$w = \left[w_{sm} - \Sigma \Omega_n \Phi_n(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] \mathfrak{m} \qquad (2)$$

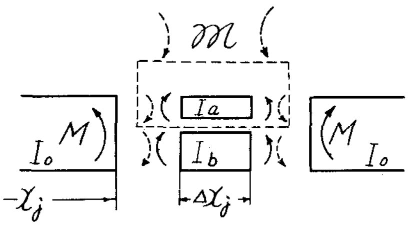
梁のたわみ曲線が式 (2) で決定されるので曲げモーメントは周知のようにたわみ曲線の2階微分より求められる．一様断面の場合には

$$M = \left[M_{s\mathfrak{m}} + EI_0 \Sigma \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] \mathfrak{m} \qquad (3)$$

ここに　$M_{s\mathfrak{m}}$ ：$\mathfrak{m} = 1$ による静的な曲げモーメント

今後解析を簡単ならしめるため，一様断面梁を使用することにする。いま荷重点付近の曲げ荷重 $\mathfrak{m}$（点線）と曲げモーメントM（実線）との関係を拡大して示すと図－2のようになる。ここで荷重点で局部的に断面2次モーメントを小さくすることを考えてみる。そのために図－2の Δx_j 部分の断面2次モーメント I_0 を2つにわけ

$$I_0 = I_a + I_b \qquad (4)$$



図－2

になるように I_a と I_b とを決定する。そうして I_a の部分を取り去り，I_b だけ残してこれを弾性ヒンジの断面2次モーメントとする。このとき曲げ荷重 $\mathfrak{m}$ と曲げモーメントMとは Δx_j 部分で I_a と I_b の大きさに比例して配分されている。図－2では $\mathfrak{m}$（点線）とM（実線）とが I_a と I_b とに分割されて作用している所を示している。Δx_j の微小部分では力の釣合に関する限り釣合っているのであるから，点線で囲んだ部分すなわち I_a とそれに作用している力とを取り去ることができる。残りの I_b に作用している力（配分された $\mathfrak{m}$ とM）が I_0 部分に作用しているMに等しければ外から加えた力すなわち与系に作用している外力は零となり式 (2) で与えられる変形のみを起していることになる。この状態は自由振動に他ならない。上のことより次式が得られる。

$$\frac{I_b}{I_0}\left(M + \frac{\mathfrak{m}}{\Delta x_j}\right) = M$$

または　$M - K\dfrac{1}{\Delta x_j}\mathfrak{m} = 0 \qquad (5)$

ここに　$\dfrac{I_a}{I_b} = K$

式 (5) と式 (4) とより振動数方程式を次式のように求めることができる。

$$M_{s\mathfrak{m}} + EI_0 \Sigma \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_j) - K/\Delta x_j = 0 \qquad (6)$$

この式は梁の中間に弾性ヒンジができた系に対する基礎式であるが，表題の境界条件の変化に対する問題に対しては，弾性ヒンジの位置を部材端に移し，そのヒンジの剛性を境界条件の剛性に等しくすればよいことは明らかであろう。