

荷重板を通して局部荷重をうける補強パイプの応力解析

東大工学部 正員 奥村敏恵

埼玉大学理工学部 正員 〇秋山成興

首都高速道路公団 正員 西野祐治郎

1. まえがき

ラーメン隅角部構造の1タイプとして、円柱-箱形はりおびじょうに多く用いられているが、これを取りあつた論文はきわめて少ない。〔1〕、〔2〕

これらは、いずれも、各部材の相互作用をパイプの有効巾でおきかえて、実用計算公式を提案したものである。

本研究では、このような従来の方法とは異なり、2次元応力状態より出発して *microscopic* に解析しようとするものである。まず予備研究として、図1に示す構造を取りあげる。

これは箱形はりのウエブによる応力伝達を無視したものであり、このタイプの研究には〔3〕があるが、荷重板に対する解析が不十分であり、本研究はこの点を修正したものである。

2. 解析の方法

各部の相互作用は、いわゆる接合条件によって、

あらわす。まず、まえがきでもふれたように、薄板構造と考へ、2次元応力状態と仮定する。

各構成部材に分割して、独立に各部材に対する解を求め、各部材の接合線上で、応力、変形が連続であるという接合条件を用いて、積分定数を求める。

各部材に作用する荷重は、*Self-equilibrating* と、*non-self-equilibrating* の荷重に分けて考へるのが便利であり、この方針に従ふ。

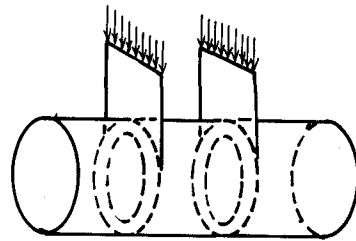


図 - 1

3. パイプの解

パイプの軸方向応力を T_1 、周方向応力を T_2 、面内せん断応力を S 、として、それぞれの方向における、曲率変化、ねじり率変化を、 K_1 、 K_2 、 τ とする。

$$\text{今 } \tilde{T}_1 = \tilde{T}_{1,k} \cos k\theta, \quad \tilde{T}_2 = \tilde{T}_{2,k} \cos k\theta, \quad \tilde{S} = \tilde{S}_k \sin k\theta$$

$$\tilde{T}_1 = T_1 + i E R c K_2, \quad \tilde{T}_2 = T_2 + i E R c K_1, \quad \tilde{S} = S - i E R c \tau, \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$$

とすれば、

self-equilibrating loads に対しては、

$$\tilde{T}_{1,k} = \sum_{j=1,3} \tilde{C}_j \left(1 - i \frac{\alpha_j^2 - k^2}{2k^2}\right) \tilde{C}_j e^{-\alpha_j(z_1 - \frac{1}{2})} + \sum_{j=2,4} \left(1 - i \frac{\alpha_j^2 - k^2}{2k^2}\right) \tilde{C}_j e^{-\alpha_j(z_2 - \frac{1}{2})}$$

$$\tilde{T}_{2,k} = \frac{i}{2k^2} \left\{ \sum_{j=1,3} (\alpha_j^2 - k^2) \tilde{C}_j e^{-\alpha_j(z_1 - \frac{1}{2})} + \sum_{j=2,4} (\alpha_j^2 - k^2) \tilde{C}_j e^{-\alpha_j(z_2 - \frac{1}{2})} \right\}$$

$$\tilde{S}_k = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{j=1,3} \alpha_j \left(i \frac{\alpha_j^2 - k^2}{2b^2} - 1 \right) \tilde{C}_j e^{-\alpha_j(\xi_1 - \frac{1}{2})} + \sum_{j=2,4} \alpha_j \left(i \frac{\alpha_j^2 - k^2}{2b^2} - 1 \right) \tilde{C}_j e^{-\alpha_j(\xi_2 - \frac{1}{2})} \right\}$$

∴ 7°

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mu_1^2 + \kappa_1^2} + \mu_1 - i \sqrt{\mu_1^2 + \kappa_1^2} - \mu_1 \right), \quad \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mu_2^2 + \kappa_2^2} + \mu_2 - i \sqrt{\mu_2^2 + \kappa_2^2} - \mu_2 \right), \quad \alpha_4 = -\alpha_3$$

$$\mu_1 = k^2 - b^2 \frac{\sqrt{1 + 4k^4/b^4} - 1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2 = k^2 + b^2 \frac{\sqrt{1 + 4k^4/b^4} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\kappa_1 = b^2 \left(1 - \frac{\sqrt{1 + 4k^4/b^4} + 1}{\sqrt{2}} \right), \quad \kappa_2 = b^2 \left(1 + \frac{\sqrt{1 + 4k^4/b^4} + 1}{\sqrt{2}} \right), \quad 2b^2 = \frac{r_0}{c}$$

non-self-equilibrating load の場合は、 $k=1$ に対応するが、この場合、局部曲げの解は、

$$\alpha = \alpha_1 + i \alpha_2, \quad \alpha_1 = \pm \sqrt{1 + b^4}, \quad \alpha_2 = \mp \frac{\sqrt{1 + b^4} (\sqrt{1 + b^4} - 1)}{b^2}$$

複号同順

となる。

4. $\eta > \gamma$ の解 (γ のヤコビの解)

内径 a 、外径 b の円形 $\eta > \gamma$ には、self-equilibrating load だけがある。

内、外円周上に、それぞれ、 $P' \cos n\theta$ 、 $P'' \cos n\theta$ の等方向荷重が作用する場合の解は、

$$\sigma_r = \left\{ (2-n) - (1-n) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+2}} \right\} A_n r^n + \left\{ (2+n) + (1+n) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^{-2n+2}}{r^{-2n+2}} \right\} A_{-n} r^{-n} + \frac{P'}{2} \left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} \right) \cos n\theta$$

$$\sigma_\theta = \left\{ (2+n) + (1-n) \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+2}} \right\} A_n r^n + \left\{ (2-n) + (1+n) \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^{-2n+2}}{r^{-2n+2}} \right\} A_{-n} r^{-n} - \frac{P'}{2} \left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} \right) \cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left\{ n + (1-n) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+2}} \right\} A_n r^n + \left\{ n - (1+n) \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^{-2n+2}}{r^{-2n+2}} \right\} A_{-n} r^{-n} - \frac{P'}{2} \left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} - \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} \right) \sin n\theta$$

$$\frac{b}{a} = \lambda, \quad \Delta = (1-n^2)(\lambda^2-1)^2 - (\lambda^{2n+2}-1)(\lambda^{-2n+2}+1)$$

$$A_n = \frac{1}{\Delta} \left[(1+n)(\lambda^2-1) \left(\frac{P''}{2} \lambda^{-n+2} - \frac{P'}{2} \right) - (\lambda^{-2n+2}-1) \left(\frac{P''}{2} \lambda^{n+2} - \frac{P'}{2} \right) \right] a^{-n}$$

接線方向荷重 $q' \sin n\theta$ 、 $q'' \sin n\theta$ が作用する場合、

$$\sigma_r = \left\{ (2-n) - (1-n) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+2}} \right\} A'_n r^n + \left\{ (2+n) - (1+n) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^{-2n+2}}{r^{-2n+2}} \right\} A'_{-n} r^{-n} - \frac{q'}{2} \left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} - \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} \right) \cos n\theta$$

$$\sigma_r = \left[\left\{ (2+n) + (1-n) \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+2}} \right\} A'_n r^n + \left\{ (2-n) + (1+n) \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^{-2n+2}}{r^{-2n+2}} \right\} A'_n r^{-n} + \frac{g'}{2} \left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} - \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} \right) \right] \cos n\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left[\left\{ n + (1-n) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+2}} \right\} A'_n r^n + \left\{ n - (1+n) \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^{-2n+2}}{r^{-2n+2}} \right\} A'_n r^{-n} + \frac{g'}{2} \left(\frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} \right) \right] \sin n\theta$$

$$A'_n = \frac{1}{\Delta} \left\{ (1+n)(\lambda^2-1) \left(-\frac{g''}{2} \lambda^{-n+2} + \frac{g'}{2} \right) - (\lambda^{-2n+2}-1) \left(-\frac{g''}{2} \lambda^{n+2} - \frac{g'}{2} \right) \right\} a^{-n}$$

5. ガイフラムース47ナーの解

ガイフラムース47ナーは、円形リブと考て計算する。 self-equilibrating の場合だけを考ればよいので、曲げモーメント M 、引張力 T は、次のようになる。

径方向荷重 $p_m \cos m\theta$ ($m \geq 2$)

$$M = - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^2 p_m}{m^2-1} \cos m\theta, \quad T = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a p_m}{m^2-1} \cos m\theta$$

接線方向荷重 $q_m \sin m\theta$ ($m \geq 2$)

$$M = - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^2 q_m}{m(m^2-1)} \cos m\theta, \quad T = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a m q_m}{m^2-1} \cos m\theta$$

6. 荷重板の解

荷重板はまず扇形領域と考て、解を求め、あとでこれを修正する。

I、II の応力状態に対する、各応力成分は、

次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a_0}{r^2} + c_0(1+2\ln r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{n\pi}{2\alpha} \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 1 \right) a_n r^{\frac{n\pi}{2\alpha}-2} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{n\pi}{2\alpha} \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 1 \right) c_n r^{-\left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 2 \right)} - \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 2 \right) \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 1 \right) \ln r^{\frac{n\pi}{2\alpha}} - \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 2 \right) \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 1 \right) d_n r^{-\frac{n\pi}{2\alpha}} \right\} \cos \frac{n\pi}{2\alpha} \theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{a_0}{r^2} + c_0(3+2\ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n\pi}{2\alpha} \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 1 \right) a_n r^{\frac{n\pi}{2\alpha}-2} + \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 2 \right) \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 1 \right) \ln r^{\frac{n\pi}{2\alpha}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\pi}{2\alpha} \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 1 \right) c_n r^{-\frac{n\pi}{2\alpha}-2} + \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 2 \right) \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 1 \right) d_n r^{-\frac{n\pi}{2\alpha}} \right\} \cos \frac{n\pi}{2\alpha} \theta \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2\alpha} \left\{ \left(\frac{n\pi}{2\alpha} - 1 \right) (a_n r^{\frac{n\pi}{2\alpha}-2} - d_n r^{-\frac{n\pi}{2\alpha}}) - \left(\frac{n\pi}{2\alpha} + 1 \right) (c_n r^{-\frac{n\pi}{2\alpha}-2} - \ln r^{\frac{n\pi}{2\alpha}}) \right\} \sin \frac{n\pi}{2\alpha} \theta$$

I の荷重 P を $\cos \frac{n\pi}{2\alpha} \theta$, $\sin \frac{n\pi}{2\alpha} \theta$ について 7-9 展開して、各係数と上記の応力成分の係数と等置する。しかし、このようにして求めた、応力状態は直線縁上の stress free の境界条件を満足しないので、これを満足させるために、次の応力と重ね合わせる。

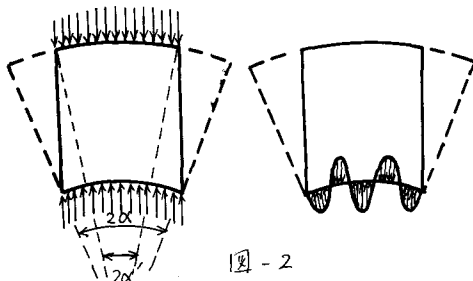


図-2

$$\sigma_r = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi\theta}{\ln b/a}} \left\{ \left\{ 2 + \left(\frac{n\pi}{\ln b/a} \right)^2 \right\} \left\{ A_n \sin \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) + B_n \cos \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n\pi}{\ln b/a} \left\{ A_n \cos \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) - B_n \sin \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) \right\} \right\} \right\}$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi\theta}{\ln b/a}} \left\{ \left\{ 2 - \left(\frac{n\pi}{\ln b/a} \right)^2 \right\} \left\{ A_n \sin \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) + B_n \cos \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3n\pi}{\ln b/a} \left\{ A_n \cos \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) - B_n \sin \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) \right\} \right\} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ln b/a} e^{-\frac{n\pi\theta}{\ln b/a}} \left\{ A_n \sin \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) + B_n \cos \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) + \right. \\ \left. + \frac{n\pi}{\ln b/a} \left\{ A_n \cos \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) - B_n \sin \left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln b/a} \right) \right\} \right\}$$

直線線上の境界条件は、これらの応力によっても、厳密に満足することはできないので、ふつう discrete な \$n\$ 個の項を選び、この項で

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta = 0, \quad \tau_{z\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta = 0$$

が成り立つようにする。(\$2n\$ 個の条件式が得られる。)

7. 接合条件

荷重板 (I)、パイプ (II)、ダイヤフラム (III) の間の接合条件を求める。

変形の連続条件は次のようになる。今 translational displacement vector をそれぞれ、

\$\vec{U}^I, \vec{U}^II\$, rotation vector を \$\vec{\mathcal{L}}_t^I, \vec{\mathcal{L}}_t^{II}\$ と表わすと、

$$\frac{d\vec{U}^I}{ds} = \frac{d\vec{U}^{II}}{ds} = - \left\{ \varepsilon_{tt}^I \vec{t}^I + [\vec{\mathcal{L}}_t^I, \vec{t}^I] \right\} = \varepsilon_{tt}^{II} \vec{t}^{II} + [\vec{\mathcal{L}}_t^{II}, \vec{t}^{II}]$$

しかも \$\vec{t}^I = -\vec{t}^{II}\$ であるから、\$\varepsilon_{tt}^I = \varepsilon_{tt}^{II}\$, \$[\vec{\mathcal{L}}_t^I - \vec{\mathcal{L}}_t^{II}, \vec{t}^I] = 0\$

今 \$\vec{\mathcal{L}}_t^I = \vec{\mathcal{L}}_t^{II}\$ とすると、\$\vec{t} \frac{d\vec{\mathcal{L}}_t}{ds}\$ は invariant であるから

$$-K_{tt}^I \mathcal{L}_t^I \vec{t}^I + K_{tv}^I \vec{t}^I \mathcal{L}_t^I - K_{tn}^I n^I \mathcal{L}_t^I = -K_{tt}^{II} \mathcal{L}_t^{II} \vec{t}^{II} + K_{tv}^{II} \vec{t}^{II} \mathcal{L}_t^{II} - K_{tn}^{II} n^{II} \mathcal{L}_t^{II} \\ = -K_{tt}^I (-n^I) (-\vec{t}^{II}) + K_{tv}^I (-\vec{t}^{II}) (-\mathcal{L}_t^{II}) - K_{tn}^I (-\mathcal{L}_t^{II}) (-\vec{t}^{II})$$

両方の成分を比較して \$\varepsilon_{tt}^I = \varepsilon_{tt}^{II}\$, \$K_{tt}^I = K_{tn}^{II}\$, \$K_{tv}^I = K_{tv}^{II}\$, \$K_{tn}^I = K_{tt}^{II}\$

同様にして \$\varepsilon_{tt}^I = \varepsilon_{tt}^{II}\$, \$K_{tt}^I = K_{tt}^{II}\$, \$K_{tv}^I = K_{tv}^{II}\$, \$K_{tn}^I = K_{tn}^{II}\$

接合線上の測地曲率変化 \$K_{tn}\$ はひずみによって、次のように表わされる。

$$K_{tn}^I = \frac{-1}{a} \left(\frac{\partial \omega^I}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_{tt}^I}{\partial s} + \varepsilon_{vv}^I - \varepsilon_{tt}^I \right), \quad K_{tn}^{II} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \omega^{II}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_{tt}^{II}}{\partial s} + \varepsilon_{vv}^{II} - \varepsilon_{tt}^{II} \right)$$

さらに応力連続条件を用いて、積分常数を定めることができ、応力が求められる。

文献 [1] 奥村, 前田, 石沢: 最近におけるラーメン構造の隅角部 土木学会誌 49 巻-11 号

[2] 奥村, 石沢: 薄板構造ラーメン隅角部の応力計算について 土木学会論文集 153 号

[3] 奥村, 秋山, 樊: パイプビームが局部荷重をうけた場合のダイヤフラムの補強効果

について 第14回橋梁・構造工学研究発表会 PP.109~121