

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

, , 学生員 後藤忠之輔

, , 学生員 中沢隆雄

1.序 一樣断面の直棒に一樣なトルクが作用する場合の一般解法は Saint-Venant により確立されているが、円形断面以外の場合には断面が及ぶために問題は極めて複雑になり、てくる。著者らは先に、独自の考案による写像法および任意形断面の場合についてもこの問題を簡単かつ系統的に解くための複素変数法を用いて、隅を丸めた十字形および正多角形断面棒の捩り解析について発表した。

本論は、さらにすすめて中心に円孔を有する任意形断面棒の捩り解析を行い、算例として中心に円孔を有する正方形、正六角形および正八角形の各断面棒を取上げ、その捩り応力を内実断面棒の場合と比較するとともに、外周隅角部の丸味および中心孔径が捩り応力に及ぼす影響を吟味検討するものである。

なお、解法は簡単のため中心に円孔を有する正多角形断面棒について説明することとする。

2.写像函数 図1に示すごとく、中心に円孔をもち5面上の原点に中心を有する隅を丸めた正多角形断面の5面上の単位円領域への写像函数は、断面の対称軸数を考慮して文献(1)の手法により次のごとく求められる。

$$Z = \sum_{n=1, N+1, 2N+1}^M a_n S^n$$

$$\text{ここに } Z = x + iy, S = e^{\alpha + i\beta}$$

$$(1) \quad S\text{-Plane } (S = e^{\alpha + i\beta}), Z\text{-Plane } (Z = x + iy)$$

図-1

(x, y) : 直角座標, (α, β) : 直交曲線座標, a_n : 実数, N : 正多角形の辺数, M : 正整数
式(1)を展開し、実数部と虚数部とをそれぞれ等置して $\alpha=0$ とすれば、正多角形断面の外周境界を定義する式が次のごとくえられる。

$$x = \sum_{n=1, N+1, 2N+1}^M a_n \cos n\beta, \quad y = \sum_{n=1, N+1, 2N+1}^M a_n \sin n\beta \quad (2)$$

式(2)の係数 a_n は外周形状をなるべく正確に表わすごとく決定しなければならぬ。係数決定の条件は式(2)で定義される曲線が任意の曲率半径を有する外周境界上の与えられた一連の点を通過することである。これら諸点を例えば正方形断面について示せば図2のごとくで、各点の座標値は次式となる。
なお、この場合、 M, N 値はそれぞれ37, 4である。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.5, y_1 = 0; & x_2 &= 0.5, y_2 = 1/8 \cdot 0.5; & x_3 &= 0.5, y_3 = 1/4 \cdot 0.5 \\ x_4 &= 0.5, y_4 = 3/8 \cdot 0.5; & x_5 &= 0.5, y_5 = 1/2 \cdot 0.5; & x_6 &= 0.5, y_6 = 5/8 \cdot 0.5 \\ x_7 &= 0.5, y_7 = 3/4 \cdot 0.5; & x_8 &= 0.5, y_8 = 7/8 \cdot 0.5; & x_9 &= 0.5 + r \cos \theta_9, y_9 = 0.5 + r \sin \theta_9 \\ x_{10} &= 0.5 + r/\sqrt{2}, y_{10} = 0.5 + r/\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\text{ただし } 0.1x = 0.1y = 0.5 - r$$

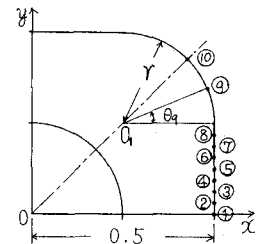


図-2

式(1)を式(2)に代入すれば、 a_n および β を未知数とする非線型多元連立方程式がえられるが、これを直接解くことは極めて困難であるゆえ、本論においては Newton の反復解法によって解くこととする。

断面中心の円孔は、式(1)において e^{α} を β_0 とおき β_0 にある値 ($0 < \beta_0 < 1$) を与えることにより、 β_0 の高次の項が1次の項に比べて極めて小となるために近似的にえられることとなる。

3.基礎方程式 柱体の捩り問題は、式(4)の複素捩り関数を、式(5)、式(6)の平衡方程式および境界条件式を満足すべく決定することになる。

$$F(z) = \varphi + i\psi \quad (\psi: \varphi \text{ の共役関数}) \quad (4)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad (\text{断面内部において}) \quad (5) \quad \psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const} \quad (\text{境界上において}) \quad (6)$$

式(6)の境界条件式における const は内実断面の場合には 0 と仮定する。これに対して中空断面の場合には外周境界上で 0 と仮定しても一般性を失うことはないが、内周境界上では 0 でない一定値となることに注意せねばならない。

$$\text{式(1)により } S \text{ の函数として定義される写像函数を一般に次式で表わす。} \quad z = \omega(s) \quad (7)$$

$$\text{式(7)を式(4)に代入して次式をうる。} \quad F(z) = F[\omega(s)] = f(s) = \varphi + i\psi \quad (8)$$

ここで、式(6)の境界条件式を複素数表示するために式(8)を用いて次式をうる。

$$\psi = -\frac{i}{2}[f(s) - \overline{f(s)}] \quad \text{ここに } \overline{f(s)} \text{ は } f(s) \text{ の共役函数} \quad (9)$$

式(9)を式(6)に代入して式(7)を考慮することにより、境界条件式は外周および内周でそれぞれ次のようになる。外周境界上において $f(\sigma) - \overline{f(\sigma)} = i\omega(\sigma) \cdot \overline{\omega(\sigma)}$ (10)

$$\text{内周境界上において} \quad f(\beta\sigma) - \overline{f(\beta\sigma)} = i\omega(\beta\sigma) \cdot \overline{\omega(\beta\sigma)} + K \quad \text{ここに } \sigma = s_{k=0} = e^{i\theta}, \beta_0 = e^{i\theta_0} \quad (11)$$

ただし外周境界上においては const = 0 とし、内周境界上においては const = K (≠ 0) とする。

次に、(x, y) 座標における応力成分 T_{xz}, T_{yz} は θ をそれぞれせん断弾性係数および単位長さ当りの捩り角として次式で与えられる。

$$T_{xz} - iT_{yz} = G\theta \left[\frac{\partial F(z)}{\partial z} - i\bar{z} \right] \quad (12)$$

$$\text{式(12)に式(7)および式(8)を代入すれば次式がえられる。} \quad T_{xz} - iT_{yz} = G\theta \left[\frac{f(s)}{\omega(s)} - i\overline{\omega(s)} \right] \quad (13)$$

一方、(α, β) 座標における応力成分 T_α, T_β と (x, y) 座標における T_{xz}, T_{yz} との関係は次式で定義される。

$$T_\alpha - iT_\beta = \frac{S\omega(s)}{\int |\omega(s)|} (T_{xz} - iT_{yz}) \quad (14) \quad \text{ここに } \beta = e^{i\alpha}, |\omega(s)| = \sqrt{\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)}} \quad (15)$$

したがって、式(14)に式(13)を代入して T_α, T_β の次のようになる。

$$T_\alpha - iT_\beta = \frac{S G \theta}{\int |\omega(s)|} [f(s) - i\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)}] \quad (16)$$

すなわち、写像函数 $z = \omega(s)$ を決定できれば、式(10)および式(11)を連立に解くことにより複素捩り函数 $f(s)$ が求められる、これを用いて式(16)より所要の T_α, T_β が決定されることになる。

4.捩り応力式 まず、複素捩り函数を決定するために式(1)を用いて次の展開を行う。

$$\text{外周境界上において} \quad \omega(\sigma) \cdot \overline{\omega(\sigma)} = \sum_{n=1, N+1}^M a_n \sigma^n \cdot \sum_{n=1, N+1}^M \overline{a_n} \sigma^{-n} = \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} A_n \sigma^n \quad (17)$$

$$\text{ここに} \quad A_0 = \sum_{n=1, N+1}^M a_n^2, A_N = \sum_{n=-M+1, 2M+1}^M a_{n-N} \overline{a_n}, A_{2N} = \sum_{n=-M+1, 3M+1}^M a_{n-2N} \overline{a_n}, \dots, A_{M-1} = a_1 \overline{a_M} \quad (A_{-n} = A_n)$$

$$\text{内周境界上において} \quad \omega(\beta\sigma) \cdot \overline{\omega(\beta\sigma)} = \sum_{n=1, N+1}^M a_n \beta^n \sigma^n \cdot \sum_{n=1, N+1}^M \overline{a_n} \beta^{-n} \sigma^{-n} = \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} B_n \sigma^n \quad (18)$$

$$\text{ここに} \quad B_0 = \sum_{n=1, N+1}^M a_n^2 \beta^{2n}, B_N = \sum_{n=-M+1, 2M+1}^M a_{n-N} \overline{a_n} \beta^{2n-N}, B_{2N} = \sum_{n=-M+1, 3M+1}^M a_{n-2N} \overline{a_n} \beta^{2n-2N}, \dots, B_{M-1} = a_1 \overline{a_M} \beta^{M+1} \quad (B_{-n} = B_n)$$

したがって、式(17)および式(18)を考慮して複素捩り函数 $f(s)$ を次式のようになる。

$$f(s) = \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} b_n s^n \quad (19)$$

式(17)と式(19)および式(18)と式(19)をそれぞれ式(10)および式(11)に代入すれば、断面の外周および内周境界上においてそれぞれ次式がえられる。

$$\text{外周境界上において} \quad \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} b_n \sigma^n - \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} \overline{b_n} \sigma^{-n} = i \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} A_n \sigma^n \quad (20)$$

$$\text{内周境界上において} \quad \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} b_n \beta^n \sigma^n - \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} \overline{b_n} \beta^n \sigma^{-n} = i \sum_{n=-M+1, -M+1+1}^{M-1} B_n \sigma^n + K \quad (21)$$

ここに $\overline{b_n}$ は b_n の共役数

式(20)および式(21)において両辺の0次の係数を比較し、 $b_n = b_n' + i b_n''$ とおくと、 b_n' , b_n'' が求められ、したがって複素振動関数として次式がえられることになる。

$$f(s) = i \sum_{n=-M+1, -M+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1} b_n' s^n \quad (22) \quad \text{ここに } b_0' = \frac{A_0}{2}, \quad b_n' = \frac{A_n - f_0^* B_n}{1 - f_0^{2n}} \quad (n \neq 0) \quad (23)$$

また、定数 K は $K = K' + i K''$ であり、 $K' = 0$, $K'' = A_0 - B_0$ となる。

次に、振動応力を求めるために式(16)における $\omega'(s) \cdot \bar{\omega}(s)$ を展開して次式をうる。

$$\omega'(s) \cdot \bar{\omega}(s) = \sum_{n=1, N+1}^M C_n (\cos n\beta - i \sin n\beta) + \sum_{n=N+1, 2N+1}^{M-1} C_n' (\cos n\beta + i \sin n\beta) \quad (24)$$

$$\text{ここに } C_1 = \sum_{n=1, N+1}^M \pi b_n e^{(n-1)\alpha}, \quad C_{N+1} = \sum_{n=N+1, 2N+1}^M \pi(n-N) b_n e^{(n-1)\alpha}, \quad C_{2N+1} = \sum_{n=2N+1, 3N+1}^M \pi(n-2N) b_n e^{(n-2N)\alpha}, \dots, \quad C_M = b_M e^{M\alpha}$$

$$C_{N-1}' = \sum_{n=N+1, 2N+1}^M \pi b_{n-N} e^{(2N-N-1)\alpha}, \quad C_{2N-1}' = \sum_{n=2N+1, 3N+1}^M \pi b_{n-2N} e^{(2N-2N-1)\alpha}, \dots, \quad C_{M-2}' = M b_M e^{M\alpha}$$

また、 $f(s)$ は式(22)より次のごとく表わされる。

$$f(s) = \sum_{n=N+1, 2N+1}^M D_n (\sin n\beta + i \cos n\beta) + \sum_{n=N+1, 2N+1}^{M-1} D_n (-\sin n\beta + i \cos n\beta) \quad (25)$$

$$\text{ここに } D_n = -(n-1) b_{n+1}' e^{-n\alpha}, \quad D_n = (n+1) b_{n+1}'' e^{n\alpha} \quad (26)$$

式(24), (25)を式(16)に代入し、両辺の実数部と虚数部とをそれぞれ等置することにより、応力成分 τ_α , τ_β を与える式が結局、次のごとく決定される。

$$\tau_\alpha = \frac{G\theta}{|\omega'(s)|} \left[\sum_{n=N+1, 2N+1}^{M-1} F_n \sin(n+1)\beta + \sum_{n=1, N+1}^M F_n' \sin(n-1)\beta \right] \quad (27)$$

$$\tau_\beta = \frac{G\theta}{|\omega'(s)|} \left[\sum_{n=N+1, 2N+1}^{M-1} F_n \cos(n+1)\beta + \sum_{n=1, N+1}^M F_n' \cos(n-1)\beta \right] \quad (28)$$

$$\text{ここに } F_n = C_n - D_n, \quad F_n' = D_n - C_n$$

ただし、 $|\omega'(s)|$ は式(15)より決定されるもので、式中の $\omega'(s) \cdot \bar{\omega}(s)$ は次式のようになる。

$$\omega'(s) \cdot \bar{\omega}(s) = \sum_{n=1, N+1}^M \pi b_n s^{n-1} \sum_{n=1, N+1}^M \pi b_n s^{n-1} = \sum_{n=1, N+1}^M E_n \cos(n-1)\beta \quad (29)$$

$$\text{ここに } E_0 = \sum_{n=1, N+1}^M \pi^2 b_n^2 e^{2(n-2)\alpha}, \quad E_N = 2 \sum_{n=N+1, 2N+1}^M \pi(n-N) b_n e^{(2N-N-2)\alpha}, \quad E_{2N} = 2 \sum_{n=2N+1, 3N+1}^M \pi(n-2N) b_n e^{(2N-2N-2)\alpha}, \dots, \quad E_{M-1} = 2M b_M e^{(M-1)\alpha}$$

5. 算例 隅半径比を $\delta = r/\omega$ (r :

隅半径, ω : 各断面の内接円直径)

として、 $\delta = 0.20$ の正三角形, $\delta = 0.15$

の正六角形および $\delta = 0.125$ の正八角形、各断面について

求めた写像関数の係数値を表-1に示す。またこの係数値

を式(1)に代入し、 β_0 を変数としてえられる各断面の円孔

半径の変化を図-3のA, B両点に示せば表-2となる。

さらに表-1の係数値を用いて式(24), (28)よりえられる振

動応力を各種断面について示せば次のごとくである。

(1) 正方形断面：中心孔径を変化させた、つまり β_0 を変数とした場合の断面内部の各点および内外周境界上の振動応力の最大値 τ_{max} および最小値 τ_{min} を表-3に示す。また β_0 を一定値(0.5)とした場合の内外周境界上および対称軸上での振動応力分布を図-4のようになる。図-5は β_0 を変数とした場合の内外周境界上における τ_{max} および τ_{min} の変化を示すものである。

(2) 正六角形断面：断面内部の各点および内外周境界上の τ_{max} , τ_{min} を表-3に対応して表-4に示す。

断面形状	N	$\beta = r/\omega$	a_1	a_{N+1}	a_{2N+1}	a_{3N+1}	a_{4N+1}	a_{5N+1}	a_{6N+1}	a_{7N+1}	a_{8N+1}	a_{9N+1}
正方形	4	0.200	538208	-051131	018842	-008868	004337	-002083	000790	-000263	000095	000214
正六角形	6	0.150	448654	019948	005744	001943	000506					
正八角形	8	0.125	510769	013651	004041	001593	000634	000205				

表-1 写像関数の係数

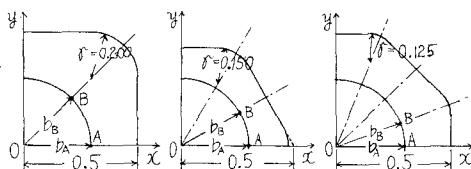


図-3

表-2 円孔半径の変化

	β_0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
正 方 形	b_A	107625	161339	247651	267342	319128	363836	415135
	b_B	107658	161587	245812	270740	327103	386193	450458
	$\frac{b_A - b_B}{b_B} (\%)$	0.03	0.15	0.49	1.18	2.44	4.50	7.66
正 六 角 形	b_A	089731	134601	179494	224484	269758	315758	363452
	b_B	089731	134592	179429	224471	269641	315697	363403
	$\frac{b_A - b_B}{b_B} (\%)$	0	0.01	0.04	0.14	0.41	1.04	2.32
正 八 角 形	b_A	102154	153230	204304	255358	306324	356497	406868
	b_B	102150	153225	204303	255401	306588	356833	410523
	$\frac{b_A - b_B}{b_B} (\%)$	0.00	0.00	0.00	0.02	0.09	0.30	0.90

また $\beta_0 = 0.5$ とした場合の応力分布についても正方形断面と同様に図-6をうる。さらに β_0 を変数とした場合の内外周境界における T_{max} , T_{min} の変化は図-7のとくである。

(2) 正八角形断面：上記二種の断面と同様に表-5, 図-8および図-9をうる。

6. 考察および結論 表-2より、中心孔は正方形断面の場合を除いて、 β_0 が 0.7~0.8 の範囲で円とみなしうることが認められる。図-5, 7, 9より、内実断面すなわち $\beta_0 = 0$ の場合と比較したときの中心孔径の振り応力に及ぼす影響を考察するに、外周境界の振り応力に関しては、中心孔径が増加するに伴い T_{max} は増加し、 T_{min} は減少するが量的にはほぼ変化なく、内実断面の場合とほとんど同値であり、また内周境界の振り応力に関しては、中心孔径の増加につれて内実断面の場合の T_{max} , T_{min} とともに大幅に増加することがある。また本来、外周隅角部が尖頂である場合にはこの点における振り応力は 0 であるが、算例に示すごく小さな振り応力が生じていることは丸味の影響が大きく作用していると判断される。さらに円周が真円である場合、内周境界の T_{max} と T_{min} とは本来一致すべきもので、算例において中心孔径の増加に伴いその差が増大していることは、内周が近似円孔であることに起因するものである。

なお、本論に取

表-5 正八角形断面

β_0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
T_{max}	102155	102152	204485	204131	309391
T_{min}	102157	102151	204485	204129	309391
T_{max}	—	—	204636	203999	309517
T_{min}	—	—	—	—	303500
T_{max}	—	—	—	—	311365
T_{min}	—	—	—	—	301512
T_{max}	—	—	—	—	437171
T_{min}	—	—	—	—	376623

影響を及ぼすかについて目下研究中で、要質断面棒の振り解析とともに後日発表する所存である。

参考文献

- 1) 山崎・後藤：九大工学集報 41-5, 昭和43年10月。
- 2) 山崎・後藤・中沢：昭和43年度土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和44年2月。

表-3 正方形断面

β_0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
T_{max}	109331	105951	228324	202068	363690
T_{min}	109971	104511	228376	202017	363697
T_{max}	—	—	239181	190417	365325
T_{min}	—	—	—	—	277931
T_{max}	—	—	—	—	319448
T_{min}	—	—	—	—	247180
T_{max}	—	—	—	—	524622
T_{min}	—	—	—	—	321036

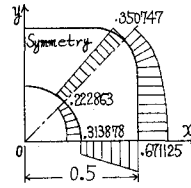


図-4 正方形断面 ($\beta_0 = 0.5$)

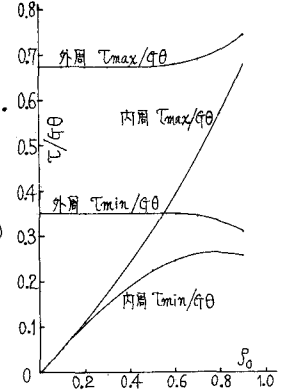


図-5 正方形断面

表-4 正六角形断面

β_0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
T_{max}	089769	089692	180671	178250	277964
T_{min}	089807	089655	180671	178250	277964
T_{max}	—	—	181716	177202	278026
T_{min}	—	—	—	—	260044
T_{max}	—	—	—	—	254012
T_{min}	—	—	—	—	393101
T_{max}	—	—	—	—	408146
T_{min}	—	—	—	—	303126

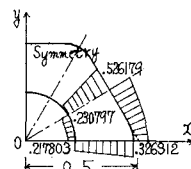


図-6 正六角形断面 ($\beta_0 = 0.5$)

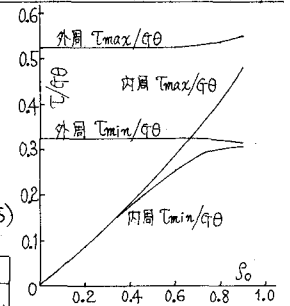


図-7 正六角形断面

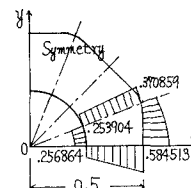


図-8 正八角形断面 ($\beta_0 = 0.5$)

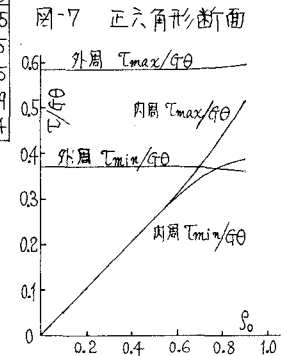


図-9 正八角形断面