

東大・正員 奥村敏恵
○同 学生員 坂井藤一

1. まえがき

一般に薄肉平板(ないし薄肉曲面板)によって構成される立体的な薄肉構造物は、その構成要素が面内変形作用ならびに面外変形作用を受け、両者が常に共存している所に特徴がある。このような薄肉立体構造物が土木構造の分野において使用されている例は近年極めて多く見受けられる。例を薄肉梁の場合に採ると、断面の薄肉化・複雑化および巾員・支間等の大型化に依って立体的な解析が必要とされているが、従来薄肉梁の立体的解析と呼ばれていたものは断面輪廓形状不変を前提とするせん断流理論(曲げ捩れ理論あるいはせん断遅れ理論)による解析が大部分であり、断面輪廓形状の変化を考慮した解析はVlasovの閉断面ビーム・シェルに関する理論や折板構造理論、更に最近の有限要素法に基づく研究が主なものである。しかしながら有限要素法に基づくものを除いてこれらの理論は種々の仮定の上になつて展開された理論である故、或る特定の条件下にのみ成立するものであり、特に板の面外曲げ変形に対する解析が不十分である。有限要素法による解析は現在この種の問題に關しては主として面内変形のみ考慮した場合に止まり、面外曲げに対する考慮は適合性を充足するたわみ変数の採択の困難さと関連してほとんど怠られていない。

先に著者等は矩形平板の集合と見なし得るような薄肉立体構造物の場合に、有限要素法の一つの考え方を基にして、平板の面内・面外変形に対する偏微分方程式から出発して重ね合せの原理と適合性を充ちるような変位関数を用いて一般化された変分法(平面の問題においてはGalerkin法)によって一般解析理論を誘導した¹⁾。これは或る精度の下に板の面内・面外変形を厳密に取扱ったものであり、一般性のある解析手法と思われる。その際この理論の一つの特殊な場合としてVlasov²⁾の閉断面ビーム・シェルに関する理論が含まれる事を述べ、箱型梁の場合に平板の面内変形のみ考慮した解析(いわゆるシェル理論における膜理論)はある特定の条件の下に成立つものである事を示した。

本報告はその延長として、著者等の解析法を箱型梁に適用し、特に平板の面外曲げが問題となるような場合、即ちフランジ部に直接鉛直荷重の載荷されるような場合(例えば鋼床板構造等)を解析して、フランジ部に載荷された荷重によって生ずる応力・変形が梁全体にどのように伝達されるかを考察し、更にダイアフラム等の補剛部材の影響を明確にする事を目的とする。

2. 一般剛性マトリックス

文献1)において、図-1に示すような薄肉立体構造系に対する一般剛性マトリックス表現を得ている。紙面の都合上詳細は省略するが、説明の便の爲概要を示すと次のようになる。

図-1において、基準座標 $x-y-z$ ならびに要素 i の局所座標 $s-\eta-\xi$ を図のように定める。 η (内向き法線方向) は ξ の正方向から見て反時計回りに $\pi/2$ だけ回転して S (輪廓線に対する接

線方向座標)に一致する時正と定める。節点*i*および*j*における*s*, *n*, *z*方向の変位ならびに*s*方向の傾きをそれぞれ u_i, v_i, w_i, θ_i および u_j, v_j, w_j, θ_j とし、荷重 $\bar{p}(s, s)$ が作用し、その各方向の成分を $\bar{p}_s, \bar{p}_n, \bar{p}_z$ とする。

要素内における各方向の変位関数を次のように表わす。

面内変位に対して、

$$U(Z, S) = U^i(S) U_i(Z) + U^j(S) U_j(Z) + U_p(Z, S) \\ W(Z, S) = W^i(S) W_i(Z) + W^j(S) W_j(Z) + W_p(Z, S)$$

面外変位に対して、

$$V(Z, S) = V^i(S) V_i(Z) + V^j(S) V_j(Z) + \theta^i(S) \theta_i(Z) + \theta^j(S) \theta_j(Z) + V_p(Z, S)$$

ここで、 U_p, W_p, V_p は節点*i*および*j*を固定境界状態にした時の荷重 $\bar{p}_s, \bar{p}_z, \bar{p}_n$ によって生ずる変位である。

以上の変位関数を用いて、変分原理によって次のような方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} F^i \\ F^j \end{Bmatrix} = [\bar{K}] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_p^i \\ F_p^j \end{Bmatrix}$$

ここで、 $\{F^i\}$ および $\{F^j\}$ は節点*i*および*j*における外力(力および曲げモーメント)を示し、又 $\{\delta_i\}$ および $\{\delta_j\}$ は節点*i*および*j*の変位ならびに*s*方向の傾きを示す。

$\{F_p^i\}$ および $\{F_p^j\}$ は U_p, W_p, V_p から求められる力ならびに曲げモーメントで、これを等価節点荷重として扱えば、結局次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}^i \\ \bar{F}^j \end{Bmatrix} = [\bar{K}] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$$

即ち、この場合 $[\bar{K}]$ は剛性マトリックスで、これは次のような形を有する。

$$[\bar{K}] = \left[[\bar{K}_1] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 + [\bar{K}_2] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + [\bar{K}_3] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + [\bar{K}_4] \right]$$

基準座標に対して適用するには、座標変換マトリックスによって変換した $[K]$ を用いれば良い。

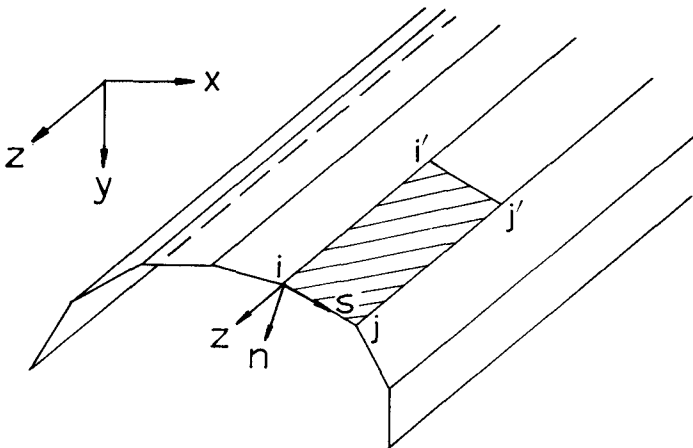
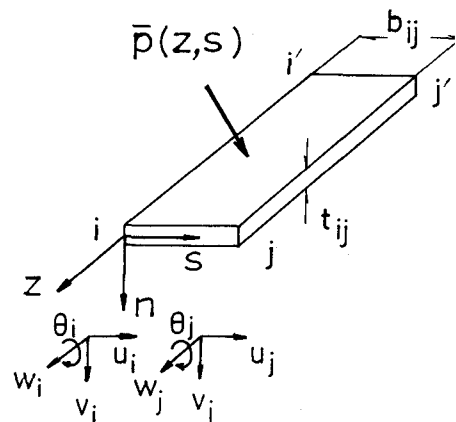


図 - 1 構造モデル



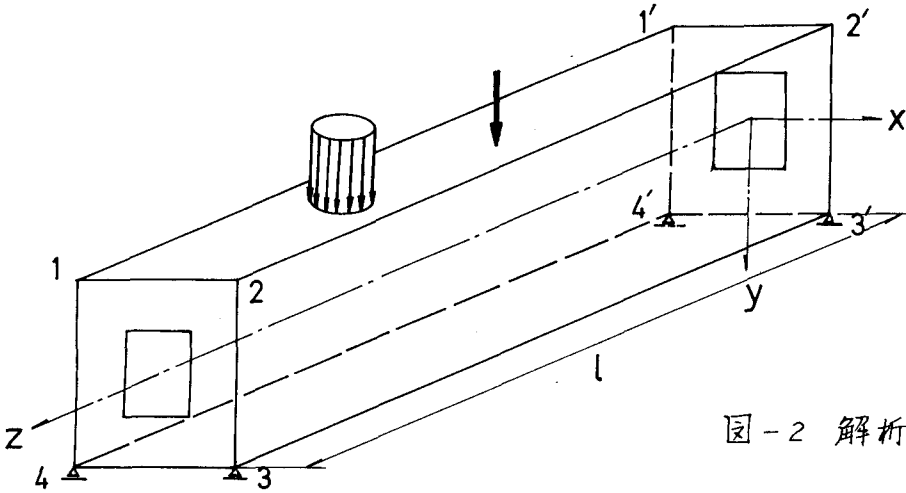


図-2 解析例

図-2に示すような箱型梁を採り上げる。端部にはダイアフラムがあり、それらダイアフラムはそれぞれ自身の面内変形に対し剛性 ∞ 、面外変形に対し剛性0と仮定する。従って梁端における境界条件は各平板について次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array} \right\} \quad \text{および} \quad \left. \begin{array}{l} N_x = 0 \\ M_x = 0 \end{array} \right\} \quad \text{at } x = 0, l$$

今最も簡単な場合として、一枚の平板を一要素と考えれば梁は四要素から構成される事になり、各稜線が要素の節点となる。これを図のように1, 2, 3, 4と名づける。

上の境界条件は従って次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} u_i(x) = 0 \\ v_i(x) = 0 \\ \theta_i(x) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{および} \quad \left. \begin{array}{l} w'_i(x) = 0 \\ u''_i(x) = 0 \\ v''_i(x) = 0 \\ \theta''_i(x) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{at } x = 0, l$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

境界条件の性質から、未知変位をFourier級数の形で表わすのが便利である。即ち、

$$\begin{aligned} w_i(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_i^{(m)} \cos(m\pi x/l) & v_i(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_i^{(m)} \sin(m\pi x/l) \\ u_i(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_i^{(m)} \sin(m\pi x/l) & \theta_i(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \theta_i^{(m)} \sin(m\pi x/l) \end{aligned}$$

鉛直方向外荷重が上フランジに作用する場合には、節点1および2において等価節点荷重が作用すると考えれば良い。即ち、鉛直方向力と x 軸まわりの曲げモーメントを荷重とし、これを次のように表わす。

$$F_y^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{y,1}^{(m)} \sin(m\pi x/l) \quad M^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_1^{(m)} \sin(m\pi x/l)$$

$$F_y^{(2)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{y,2}^{(m)} \sin(m\pi x/l) \quad M^{(2)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_2^{(m)} \sin(m\pi x/l)$$

(荷重側) 上フランジに等分布荷重が満載される場合。

上フランジ板を二辺固定かつ二辺単純支持境界条件の下に解いたたわみ $v_p(x, S)$ より、等価節点荷重は次のように求められる。Fourier の係数で示すと、³⁾

$$F_{q,1}^{(m)} = F_{q,2}^{(m)} = \frac{2a}{\pi^2} q \left[\frac{1}{m^2} \{ (-1+\nu) \alpha_m + (3-\nu) \tanh \alpha_m + (1-\nu) \alpha_m \tanh^2 \alpha_m \right. \\ \left. - \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (-1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)} \} \{ (-1+\nu) \alpha_m + (1+\nu) \tanh \alpha_m + (1-\nu) \alpha_m \tanh^2 \alpha_m \} \right]$$

$$M_1^{(m)} = -M_2^{(m)} = -\frac{4a^2}{\pi^3} q \left[\frac{1}{m^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (-1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)} \right]$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b_{12}}{2\ell}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

以上のように表現された各節点の力と変位は、全体の剛性マトリックス $[K_{SUM}]$ によって結びつけられる。即ち、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_m F_{q,1}^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m M_1^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ 0 \\ 0 \\ \sum_m F_{q,2}^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m M_2^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_{SUM}] \begin{Bmatrix} \sum_m W_1^{(m)} \cos(m\pi x/\ell) \\ \sum_m U_1^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m V_1^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m \theta_1^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m W_2^{(m)} \cos(m\pi x/\ell) \\ \sum_m U_2^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m V_2^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m \theta_2^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m W_3^{(m)} \cos(m\pi x/\ell) \\ \sum_m U_3^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m V_3^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m \theta_3^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m W_4^{(m)} \cos(m\pi x/\ell) \\ \sum_m U_4^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m V_4^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \\ \sum_m \theta_4^{(m)} \sin(m\pi x/\ell) \end{Bmatrix}$$

この方程式から $W_i^{(m)}, U_i^{(m)}, V_i^{(m)}, \theta_i^{(m)}$ ($i=1,2,3,4$) を求めれば、未知変位 W_i, U_i, V_i, θ_i ($i=1,2,3,4$) は決定された事になる。

参考文献

1) 奥村・坂井 “有限要素法と折板構造の関連について”

JSSC・マトリックス構造解析シンポジウム論文集 日本鋼構造協会 1969

2) V.Z. Vlasov “Thin-Walled Elastic Beams” I.P.S.T. 1961

3) S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger “Plates and Shells” McGraw-Hill 1959