

東北大学大学院 学生員 〇岸野佑次

東北大学工学部 正 員 佐武正雄

1. まえがき

ここに述べる方法は微分方程式を解く際に単に微分演算子を差分表示して解析を行う通常の差分法とは異なり、高次の項までを考慮した Taylor 級数を近似式に用いて精度を高めようとする方法である。通常の差分法や有限要素法の考え方もべき級数による解函数の近似を行うことになるが、いずれも局所的な近傍に於ける近似である。微分方程式を解析的に解く場合に解がある函数の形で表現されるように、本論文の方法も高次の微係数の連続性が保証されている範囲に於ては解がある一つのべき級数として表わされると考えて解析を行っている。この方法を周辺固定板の例題に応用すると、後に示すように比較的少ない分割で有限要素法や通常の差分法に較べ非常に良い結果を与える。

2. 基本的な解析方法

i) 先ず、梁のような一次元の問題について説明する。

図-1 の区間 AB で任意階の連続な微係数をもつ函数 $f(x)$ を考える。今、AB を $n-1$ 個に分割し、 $x_1, \dots, x_n$ 点での $f(x)$ の値、及び境界 x_1, x_n 点での $f(x)$ の微係数の値 (m 個とする) より成る $n+m$ 元のベクトルを V と記す。

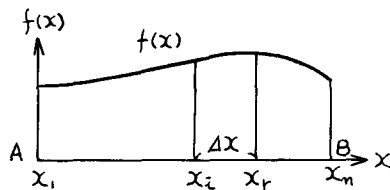


図-1

$f(x)$ の近似として分割点の函数値で定まるべき級数を考える

と、その $n+m-1$ 次の項までをとったとき近似式は一意的に定まる。このことから、AB 中の一点 x_i のまわりの Taylor 展開を $n+m-1$ 次の微係数までを考慮に入れると、 x_r 点での函数の値 f_r 、及び s 次の微係数の値 $f_r^{(s)}$ は、 $f_i, f_i', f_i'', \dots, f_i^{(n+m-1)}$ により夫々次のように表わされる。

$$f_r = f_i + \Delta x f_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2} f_i'' + \dots + \frac{(\Delta x)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} f_i^{(n+m-1)} \quad (1)$$

$$f_r^{(s)} = f_i^{(s)} + \Delta x f_i^{(s+1)} + \dots + \frac{(\Delta x)^{n+m-1-s}}{(n+m-1-s)!} f_i^{(n+m-1)} \quad (2)$$

x_i 点で考えた $n+m$ 元のベクトル

$$\psi_i = (f_i, f_i', f_i'', \dots, f_i^{(n+m-1)})^T \quad (3)$$

を定義すると、(1), (2) 式を用いて

$$V = A_i \psi_i \quad (4)$$

なる正方マトリックス A_i が定まる。 A_i の逆マトリックスを求めれば、

$$\psi_i = A_i^{-1} V \quad (5)$$

となり、 x_i 点での微係数が V の要素の一次結合として表わされる。

さて、問題の基礎微分方程式はそれに関係する微係数を(5)式から選ぶことにより V の要素の一次結合として差分化される。この差分式を m 個の分割点について考え、境界上での条件式を m 個とすれば、合計 $n+m$ 個の式により V が決定される。従ってこの節の初めに述べた境界上の微係数の値は境界条件によって定まる。また境界条件が函数の値を与えている場合には微係数を1つ未知数として残す。各分割点での m 個の方程式と境界上での m 個の条件式は $(n+m)^2$ 元のマトリックスと荷重項などの定数項を表わす $n+m$ 元のベクトル C により

$$M V = C \quad (6)$$

と表わされるが、この連立一次方程式を解くことにより V が求まる。こうして得られた V を(5)式に用いれば、応力計算その他に必要な微係数の値が計算される。

ii) 板ヤシエル等の場合も基本的には今まで述べたことと変わりがない。図-2に於ける x, y 方向の微分 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ を夫々 $(\cdot), (\cdot)'$ で表わすとすれば、函数 $f(x, y)$ の偏微分係数の内、 $f', f'', f''', \dots$ 等は(5)式と同じように求まる。 x に関する偏微分係数については、 $y = y_i$ なる線上に於ける m 個の分割点での函数の値と m 個の境界上の微係数の値とから成るベクトル V_i を定めれば、(2.3)点で考えたベクトル

$$V_i = (f_{ij}, f'_{ij}, f''_{ij}, \dots, f^{(n+m-1)}_{ij})^T \quad (7)$$

は(5)式にならって次のように表わされる。

$$V_i = A_{ij}^{-1} V_j \quad (8)$$

y に関する偏微分係数も同様にして求まり、

$$V_j^* = (f_{ij}, f'_{ij}, f''_{ij}, \dots)^T \quad (9)$$

は $x = x_i$ なる線上で考えたベクトルを V_i^* とすれば、

$$V_j^* = (A_{ij}^*)^{-1} V_i^* \quad (10)$$

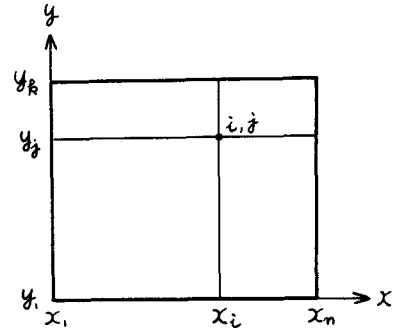


図-2

である。また、 $f', f'', f''', \dots$ 等は、次のようにして求める。例えば、 y 方向へは一階の偏微分係数を考えると、 V_j^*, V_i^* が各々の成分を y について一階微分したものを表わすとすれば、

$$V_j^* = A_{ij}^{-1} V_i^* \quad (11)$$

となり、この V_i^* の成分は(11)式によって求めることができる。従って、 x, y 両方向に関係する微係数は境界全ての点に於ける函数の値や境界上での微係数の値の一次結合として表わされる。

V_j, V_i^* のいずれかを y または x の全てに亘って集めたものから成るベクトルを改めて V と記せば、この V は(6)式より求めることができる。

シエルの問題に於けるような連立偏微分方程式の場合には、未知数毎に上に述べたような差分化を行ってやれば、結局は(6)式を解く問題とすることができる。

3. 応用例

i) 等分布荷重を受ける周辺固定正方形板 x, y 各方向に4等分するものとして説明する。

(境界条件)

$$x = x_1, x = x_5 \text{ で } w = 0, w' = 0 \quad (a)$$

$$y = y_1, y = y_5 \text{ で } w = 0, w' = 0 \quad (b)$$

対称性を考慮して、 $\frac{1}{4}$ をとって計算する。 x_2 点で x の偏微分係数を求める際用いるベクトル V_x, V_y を示す。

$$V_x = (w_{12}, w_{12}', w_{12}''', w_{22}, w_{22}', w_{22}''', w_{32}, w_{32}', w_{32}''', w_{32}^{(5)}, w_{32}^{(7)})^T \quad (c)$$

$$V_y = (w_{21}, w_{21}', w_{21}''', w_{22}, w_{22}', w_{22}''', w_{23}, w_{23}', w_{23}''', w_{23}^{(4)}, w_{23}^{(6)}, w_{23}^{(7)}, w_{23}^{(8)})^T \quad (d)$$

マトリックス A_{22} は 次のようになる。

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & -\frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!} \\ 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & -\frac{h^7}{7!} \\ 0 & 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \end{pmatrix} \quad (e)$$

各点に於ける同様のマトリックスを求め、(8) 式或は(10) 式を計算して差分表示を行い、これを板の基礎方程式 $\Delta w = p/D$ に適用すれば、(6) 式の M を組み立てることができる。4等分の他 6, 8, 10, 12等分で計算した結果を図-4に示す。比較的少ない分割でも良い収束をしている。

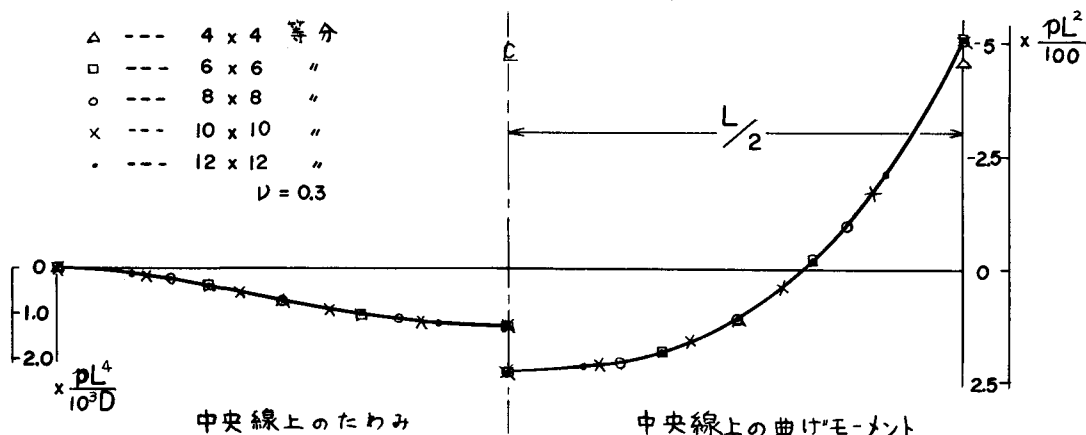


図-4

計算結果を有限要素法による解析結果や Timoshenko の級数解と比較したものを表-1に示す。

表-1

		分割			Timoshenko ¹⁾
		4 × 4	6 × 6	8 × 8	
中央たわみ ($\times \frac{PL^4}{D}$)	a	0.00127	0.00127	0.00127	0.00127
	b	0.00140	0.00133	0.00130	
負最大曲げモーメント($\times PL^2$)	a	-0.0463	-0.0518	-0.0513	-0.0513
	b	-0.0476	-0.0496	-0.0503	
正最大曲げモーメント($\times PL^2$)	a	0.0233	0.0229	0.0229	0.0231
	b	0.0278	0.0249	0.0240	

a: 高精度差分法

b: 有限要素法²⁾

ii) 法線方向の等分布荷重を受ける周辺固定円筒シェル³⁾ 図-5のa)に示す形状のシェルについて本文の方法により分割を次々に細かくして数値計算を行った。同図に示したのはx, y各方向共に12等分及び14等分した場合の結果である。グラフより解はほぼ収束したと思われる。

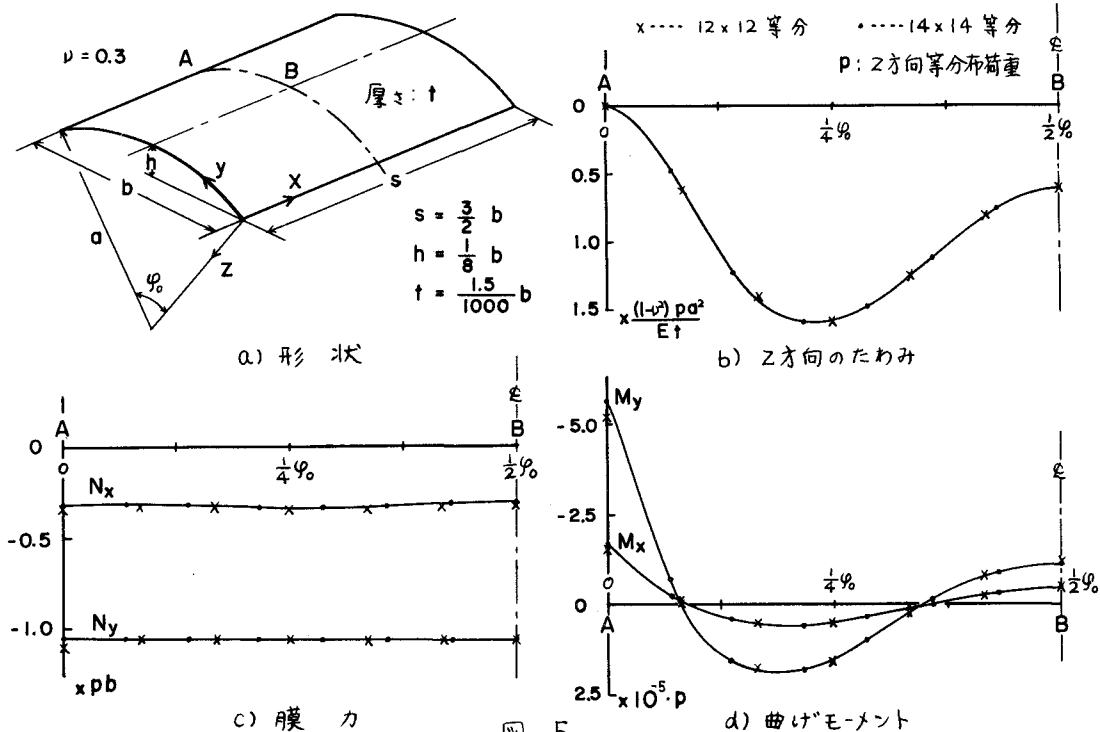


図-5

4. あとがき 本論文の差分法によれば、分割を細かくすることが(1)式により精度を増すこととなり、これは解析的に求めた級数解の何項までを計算するかということに対応していると思われる。有限要素法や通常の差分法がべき級数の限られた項をとって局所的な近似を行うことを考えれば、ここに述べた方法は精度をより正確に把握することができると考えられる。

(参考文献)

- 1) Timoshenko, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill (1959).
- 2) Zienkiewicz, O. C. & Cheung, Y. K. : The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. Inst. Civil. Engrs. 28 (1964), 471-488.
- 3) 佐武岸野 : 周辺固定円筒シェルの数値解析とその考察, 土木学会第23回年次学術講演概要 (1968).
- 4) 岸野, 佐武 : 差分による構造解析の高精度化に関する一考察, 日本鋼構造協会第3回大会マトリクス構造解析講演論文集 (1969).