I-62　　分割による骨組構造解析の考察

広島大学工学部　正員　大村 裕
日本道路公団大阪支社　正員　○山根哲雄

## 1. まえがき

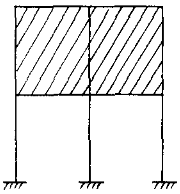
骨組構造物の解析は元数の多い連立方程式を解くことが多い。このため電子計算機を利用することになるが，新らしく連立方程式の係数を如何に組織的に求めるかという公式化，及び元数が非常に多いとき，いかに計算機の容量内で解くかという二つの問題が生じてくる。前者に対しては，W. R. Spiller[1] らの論文にネットワークの性質を利用した解法が述べられている。後者の研究には G. Kron[2] の方法と呼ばれる Tear and Interconnecting , Elimination - Backsubstitution 等があり，さらに近年 I.B.M. 開発のプログラム FRAN[3] の一部にマトリックス圧縮法等がある。本研究では，とくに電気回路解析などに使用されている Kron の分割法をとりあげ，実際の構造物を解析して比較検討してみた。

## 2. 解式

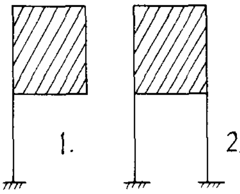
ここでいう Kron の分割法は，実際の大きい複雑な構造系を，全体構造について得るスティフネスマトリックスの逆マトリックスを求めずに解析しようとするものである。系をいくつかの部分系に分け，その部分系の解を変換操作によって結びつけて元の系の解とするものである。変換の他に必要とする演算は，分割した点に生じてくる拘束力を消去することである。図－1 のように任意の構造物(2次元でも，3次元でもよい)を考える。図－2 のごとく分割をおこない，各部分構造についてスティフネスマトリックス $K$ を求め，それより逆マトリックス $F_i = K_i^{-1}$ を求める。

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

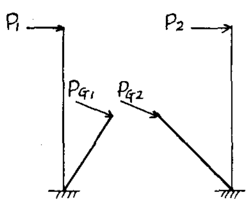
全体構造の F を求めるための変換操作に必要な結合マトリックス C をつくる。このため図－3 に示すように節点の位置に無関係な簡略化したネットワークで表示し，分割した節点 K に作用



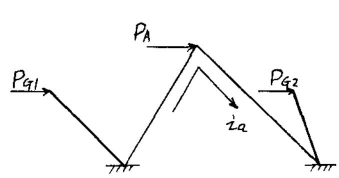
図－1. 任意の構造物




図－2. 分割した図




図－3　簡略化したネットワーク




図－4　結合したネットワーク

する荷重を $P_1, P_2$ で代表させ，分割点以外の節点に作用する荷重を $P_{G1}$，$P_{G2}$ で代表させる。図－4に一つに結合された部分構造を示す。結合節点には，外力 $P_A$ が作用するものと考える。また，結合によって矢印で示す方向に内力がはたらく。$P$ と $i$ の間には次の関係が成立する。

$$P_1 = P_A - i_a , \quad P_2 = i_a , \quad P_{G1} = P_{G1} , \quad P_{G2} = P_{G2} \tag{2}$$

式(2)をマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_{G1} \\ P_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_A \\ P_{G1} \\ P_{G2} \\ i_a \end{bmatrix} \tag{3}$$

ベクトル表示すると　$\mathbb{P} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{P}'$　$\mathbb{C}$：連結マトリックス　(4)

$\mathbb{C}$ の要素は2次元の場合(3x3)，3次元の場合(6x6)の単位マトリックスである。ネットワークの性質により，

$$\mathbb{F}' = \mathbb{C}^T \mathbb{F} \cdot \mathbb{C} \qquad T：転置マトリックス \tag{5}$$

さらに未知の拘束力 $i_a$ が入ってくるが，$i_a$ による変位は0であるから，これを消去できる。式(6)に示すように $\mathbb{F}'$ を外力によるものと内力によるものとに区分する。

$$\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1' & F_2' \\ F_3' & F_4' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P' \\ i_a \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u &= \mathbb{F}_1' \mathbb{P} + \mathbb{F}_2' \cdot i_a \\ 0 &= \mathbb{F}_3' \mathbb{P} + \mathbb{F}_4' \cdot i_a \end{aligned} \tag{7}$$

式(7)から $i$ を消去することにより全体構造のフレキシビリティーマトリックスは

$$\mathbb{F}' = \mathbb{F}_1' - \mathbb{F}_2' \mathbb{F}_4'^{-1} \mathbb{F}_3' \tag{8}$$

## 3. 考察

分割して構造物を解いた場合と分割しない場合について、電子計算機に必要な記憶容量を比較するために剛結された2次元構造物の簡単な例題をとり扱った。構造物のスティフネスマトリックス $K$ は W.R.Spiller のネットワークの考え方にもとづいた式から求めた。これらより結論として，

| | 部材数 | 節点数 | $F(K^*)$ | $Q$ | $F(K^*)+Q$ | 逆マトリックス演算元数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分割によるA構造 | 12 | 6 | 36x36 | 36x18 | 3,888 | 18 |
| 〃 B構造 | 11 | 6 | — | — | — | 18 |
| 分割しない場合 | 23 | 9 | 69x69 | 69x27 | 13,248 | 27 |

$F$：式(5)の演算のために必要なマトリックス，$Q$：節点接続行列
$K^*$：部材剛性のためのマトリックス，$F(K^*)+Q$：必要記憶容量

(1) 計算機に必要とする容量を減少させ，逆行列演算を小行列で行い，精度を高め演算数を減ずる。

(2) ある構造に新たに部分構造を継ぎたす場合，上記の変換を利用すれば，新しい構造物について始めから計算することなく部分構造の影響を加えることができる。

(3) FRANのマトリクス圧縮法及びKronの分割法のいずれも部分系の逆マトリックスを求めるが，前者は部分系の影響を次々に加えていくのに対し，後者はこれを一度にとり扱う。

(4) 分割法を有限要素法へ応用すること及び支承条件の変った場合について現在研究中である。

参考文献

1. F. Di Maggio & W.R. Spiller: Network Analysis of Structures, Jour. ASCE. EM.3. 1965-6.
2. G. Kron: A Set of Principles to Interconnect the Solution of Physical Systems, Jour. Applied Physics, Vol. 24. No.8
3. W. Weaver: Computer Programs for Structural Analysis 1967.