I-61

変形法と応力法の関係

法政大学　正員　大地 羊三

本文は、変形法、たわみ角法、四連モーメント定理による方法、弾性方程式による方法の間の関係について述べたものである。

1　変形法の解式

節点の釣合条件式 $\begin{bmatrix}\alpha_x & 0\\ 0 & \alpha_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X/L & -Y/L\\ Y/L & X/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_a\\ S_a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_x & 0\\ 0 & \beta_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X/L & -Y/L\\ Y/L & X/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_b\\ S_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_x\\ P_y\end{bmatrix}$, $\alpha M_a+\beta M_b=m_z$

を部材の釣合条件式 $N_b=-N_a \quad S_b=-S_a \quad M_a+M_b=L S_a$

によって変形すると $\begin{bmatrix}\delta_x & 0\\ 0 & \delta_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X/L & -Y/L\\ Y/L & X/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_a\\ S_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_x\\ P_y\end{bmatrix}$, $\delta_\theta\frac{1}{2}(M_a-M_b)=m_z-\mu_\theta\frac{L}{2}S_a$　(1,2)

が得られる。たゞし $\delta_x=\alpha_x-\beta_x$, -----, $\mu_\theta=\alpha_\theta+\beta_\theta$ とおいた。

一方、部材の変形条件式 $\begin{cases}N_a=-\frac{EA}{L}\Delta l & M_a=\frac{2EI}{L}(2\theta_a+\theta_b-3R)\\ S_a=\frac{6EI}{L^2}(\theta_a+\theta_b-2R) & M_b=\frac{2EI}{L}(\theta_a+2\theta_b-3R)\end{cases}$

は節点の変形条件式 $\begin{bmatrix}\Delta L\\ RL\end{bmatrix}\equiv-\begin{bmatrix}u_a-u_b\\ v_a-v_b\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}X/L & Y/L\\ -Y/L & X/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x^T & 0\\ 0 & \delta_y^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\ y_p\end{bmatrix}$　$\begin{matrix}\theta_a=\alpha_\theta\theta_p\\ \theta_b=\beta_\theta\theta_p\end{matrix}$　(3,4)

を用いて変形すると、次のように書き変えられる。

$$N_a=-\frac{EA}{L}\Delta L=-\frac{EA}{L}\left(\frac{X}{L}\delta_x^T x_p+\frac{Y}{L}\delta_y^T y_p\right),\quad \frac{M_a-M_b}{L}=\frac{2EI}{L^2}\delta_\theta^T\theta_p \qquad (5,6)$$

$$S_a=-\frac{12EI}{L^2}R+\frac{6EI}{L^2}\mu_\theta^T\theta_p=-\frac{12EI}{L^2}\left(-\frac{Y}{L}\delta_x^T x_p+\frac{X}{L}\delta_\theta^T y_p\right)+\frac{6EI}{L^2}\mu_\theta^T\theta_p \qquad (7)$$

そして、式（5~7）を式（1~2）に代入すれば、変形法の解式が得られる。

2　弾性方程式

式（1，2）は、式の数が未知数の数より少ない連立一次方程式であるから、確定した解は得られないが、形式的には、未定定数を含む次のような形に解く事が出来る。

$$\begin{bmatrix}N_a\\ S_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X/L & Y/L\\ -Y/L & X/L\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}^T X_H\\ \delta_{y\perp}^T X_V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_x^T(\delta_x\delta_x^T)^{-1}P_x\\ \delta_y^T(\delta_y\delta_y^T)^{-1}P_y\end{bmatrix}\right\} \qquad (8)$$

$$\frac{1}{2}(M_a-M_b)=\delta_{\theta\perp}^T X_M+\delta_\theta^T(\delta_\theta\delta_\theta^T)^{-1}\left[m_z-\mu_\theta\frac{L}{2}S_a\right] \qquad (9)$$

たゞし、$\delta_{x\perp}^T$, $\delta_{y\perp}^T$　$\delta_{\theta\perp}^T$ 等は、左から δ_x, δ_y , δ_θ をかけると 0 になる行列である。これも一義的に定まるものではないが、本文に関する限り、その任意性は許容される。

一方　式（5~7）は、次のように書き変えられるから

$$\begin{bmatrix}N_a\\ S_a\\ \frac{1}{2}(M_a-M_b)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{EI}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{X}{L} & \frac{Y}{L} & 0\\ -\frac{Y}{L} & \frac{X}{L} & 0\\ 0 & 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x^T & 0 & -\frac{Y}{2}\mu_\theta^T\\ 0 & \delta_y^T & \frac{X}{2}\mu_\theta^T\\ 0 & 0 & \delta_\theta^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\ y_p\\ \theta_p\end{bmatrix} \qquad (10)$$

これと式(8),(9)を等しいとおき，x_p, y_p, θ_p を消却すると，次の弾性方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix}\delta_{x\perp} & 0 & 0\\ 0 & \delta_{y\perp} & 0\\ 0 & 0 & \delta_{\theta\perp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & 0 & \frac{Y}{2}a\\ 0 & E & \frac{-X}{2}a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{X}{L} & \frac{-Y}{L} & 0\\ \frac{Y}{L} & \frac{X}{L} & 0\\ 0 & 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{L}{EA} & 0 & 0\\ 0 & \frac{L^3}{12EI} & 0\\ 0 & 0 & \frac{L}{EI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{X}{L} & \frac{Y}{L} & 0\\ \frac{-Y}{L} & \frac{X}{L} & 0\\ 0 & 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ a^T\frac{Y}{2} & -a^T\frac{X}{2} & E\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}^T X_H\\ \delta_{y\perp}^T X_V\\ \delta_{\theta\perp}^T X_M\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_x^T(\delta_x\delta_x^T)^{-1}P_x\\ \delta_y^T(\delta_y\delta_y^T)^{-1}P_y\\ \delta_\theta^T(\delta_\theta\delta_\theta^T)^{-1}m_z\end{bmatrix}\right\}$$

たゞし，$a=\mu_\theta^T(\delta_\theta\delta_\theta^T)^{-1}\delta_\theta$ とおいた。

3，四連モーメント定理による方法

式(8, 9)はそのまゝのこし，式(10)（式(5~7)と考えてもよい）から弾性方程式を求める部分を次のように変更する。$S_a=\frac{1}{L}(M_a+M_b)$ なる事を考慮して，式(6, 7)を下の左のようにまとめ，これから θ_p を消却すると，右のような結果が得られる。

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{L}(M_a+M_b)\\ \frac{1}{L}(M_a-M_b)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{L^3} & 0\\ 0 & \frac{4EI}{L^3}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\frac{L}{2}\mu_\theta^T\\ \frac{L}{2}\delta_\theta^T\end{bmatrix}\theta_p-\begin{bmatrix}E\\ 0\end{bmatrix}RL\right\}\longrightarrow\begin{bmatrix}0 & \delta_{\theta\perp}\\ E & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{L}{6EI} & \frac{L}{6EI}\\ \frac{L}{2EI} & \frac{-L}{2EI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_a\\ M_b\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{L}\end{bmatrix}RL \tag{11}$$

一方，式(3)より，x_p, y_p を消却して $\begin{bmatrix}\delta_{x\perp} & 0\\ 0 & \delta_{y\perp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{X}{L} & \frac{-Y}{L}\\ \frac{Y}{L} & \frac{X}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta L\\ RL\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}\frac{X}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{Y}{L}\end{bmatrix}\Delta L+\begin{bmatrix}-\delta_{x\perp}\frac{Y}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{X}{L}\end{bmatrix}RL=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ (12)

を作り、式(5)を用いて ΔL を N_a に変え，これに式(8)の第一式と式(11)の第二式を代入すると

$$\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}\frac{X}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{Y}{L}\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{bmatrix}\frac{X}{L}\delta_{x\perp}^T, & \frac{Y}{L}\delta_{y\perp}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_H\\ X_V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\delta_{x\perp}\frac{Y}{2}\\ \delta_{y\perp}\frac{X}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E, & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{L}{6EI} & \frac{L}{6EI}\\ \frac{L}{2EI} & \frac{-L}{2EI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_a\\ M_b\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}\frac{X}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{Y}{L}\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{bmatrix}\frac{X}{L}, & \frac{Y}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x(\delta_x\delta_x^T)^{-1}P_x\\ \delta_y(\delta_y\delta_y^T)^{-1}P_y\end{bmatrix}$$

が得られる。これと式(11)の第一式を連立させ，式(8)の第二式，式(9)を用いて断面力と X_H, X_V, X_M に変えると弾性方程式が得られる。

4，たわみ角法の解式

式(8)と式(10)（またわ式(5~7)）をのこし，式(9)の代りに式(2)を用いる。式(2)に式(6, 7)を代入すると

$$\left(\delta_\theta\frac{EI}{L}\delta_\theta^T+\mu_\theta\frac{3EI}{L}\mu_\theta^T\right)\theta_p-\mu_m\frac{6EI}{L^2}RL=m_z \tag{13}$$

が得られる。これがたわみ角法の節点方程式である。一方，式(3)を変形した式(12)の Δl を N_a に変え（式(5)を用いて），式(8)の第一式を用いると

$$-\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}\frac{X}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{Y}{L}\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{bmatrix}\frac{X}{L}\delta_{x\perp}^T, & \frac{Y}{L}\delta_{y\perp}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_H\\ X_V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\delta_{x\perp}\frac{Y}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{X}{L}\end{bmatrix}RL=\begin{bmatrix}\delta_{x\perp}\frac{X}{L}\\ \delta_{y\perp}\frac{Y}{L}\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{bmatrix}\frac{X}{L}, & \frac{Y}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x^T(\delta_x\delta_x^T)^{-1}P_x\\ \delta_y^T(\delta_y\delta_y^T)^{-1}P_y\end{bmatrix} \tag{14}$$

が得られ，また式(6)と式(8)の第一式を等しいとおくと

$$-\frac{6EI}{L^2}\mu_\theta^T\theta_p+\begin{bmatrix}-\frac{Y}{L}\delta_{x\perp}^T, & \frac{X}{L}\delta_{y\perp}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_H\\ X_V\end{bmatrix}+\frac{12EI}{L^3}RL=\begin{bmatrix}\frac{-Y}{L}, & \frac{X}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x^T(\delta_x\delta_x^T)^{-1}P_x\\ \delta_y^T(\delta_y\delta_y^T)^{-1}P_y\end{bmatrix} \tag{15}$$

が得られる。最後の二式より，X_H, X_V を消却したものがたわみ角法の層方程式である。