I-54

弾性床版の挙動について

東洋大学工学部　正会員　浅井貞重

1 緒言

1次元弾性床上にある無限梁に荷重が作用したときの変形およびモーメント分布は既に求められており，式および図表などによって求められるようになっている。然るに2次元弾性床版となるとLaplaceやFourier変換を用いて求められてはいるが数少く，また解の中にはHankel関数や積分方程式の型になっていて複雑である。そこで版上に一様な矩形荷重が単独に作用したときに生じる変形を1次元の集中荷重による変形式の2重項で近似し，係数をエネルギ法より求め変形および固有振動数を求めた。

2 基礎方程式

弾性床版の変形を決定する要因の一つに支持力があるが，この力を求める式はまだ出来ていない[1]，そこで支持力は外力に比例するものとしClark[2]のmodelにつき考えることにした。次に矩形荷重の各辺はxおよびy軸に平行で，その中心が座標の原点に一致しているとき版の変形wを第1象限のみについて考えることにし（即ちx,y共正のみを考える），

$$w=w_0 e^{-\alpha x}\sin\left(\alpha x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{-\beta y}\sin\left(\beta y+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

とするとwはxおよびyが∞または0でderivativeが0となるから版の曲げによるエネルギV_1は

$$V_1=\frac{D}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy \qquad (2)$$

弾性床の変位によるエネルギV_2は

$$V_2=\frac{k}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty w^2\,dx\,dy \qquad (3)$$

外力の仕事によるエネルギV_3は

$$V_3=\int_0^a\int_0^b p w\,dx\,dy \qquad (4)$$

である。従って全ポテンシャルエネルギVは

$$V=V_1+V_2-V_3 \qquad (5)$$

であり，wの不定定数w_0, α, βはエネルギの停留原理

$$\frac{\partial V}{\partial w_0}=\frac{\partial V}{\partial \alpha}=\frac{\partial V}{\partial \beta}=0 \qquad (6)$$

より求められる。(1)を(2),(3),(4)に代入すると

$$V_1=\frac{D w_0^2\alpha\beta}{16}\left\{1+\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right\} \qquad V_2=\frac{9}{128}\cdot\frac{k w_0^2}{\alpha\beta} \qquad (7),(8)$$

$$V_3=\frac{p w_0}{2\alpha\beta}\left(e^{-\alpha a}\cos\alpha a-1\right)\left(e^{-\beta b}\cos\beta b-1\right) \qquad (9)$$

（床版にかかる荷重がタイヤ圧のような場合には受圧面が矩形で均一に作用していると仮定することが出来る）[3]

3 変形

変形を求めるには(6)式の條件を用いればよいのであるがVに超越関数が入っているため解析によって求めることは不可能である。そこで次のように考える，(6)式の第1式より

$$w_0=\frac{p}{k}\cdot\frac{4\left(e^{-\alpha a}\cos\alpha a-1\right)\cdot\left(e^{-\beta b}\cos\beta b-1\right)}{\frac{D\alpha^2\beta^2}{k}\left\{1+\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right\}+\frac{9}{8}} \qquad (10)$$

を得，(10)式のw_0を(7),(8)および(9)式に代入すると(5)式は

$$V=\frac{-p^2b^2}{k}\cdot\frac{\lambda}{\alpha a\cdot\beta b}\cdot\frac{\left(e^{-\alpha a}\cos\alpha a-1\right)^2\cdot\left(e^{-\beta b}\cos\beta b-1\right)^2}{\frac{D}{k b^4}\left(\frac{\alpha a\cdot\beta b}{\lambda}\right)^2\left[1+\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\alpha a}{\beta b}\right)^2+\left(\lambda\frac{\beta b}{\alpha a}\right)^2\right\}\right]+\frac{9}{8}} \qquad \left(\text{但し}\ \lambda=\frac{a}{b}\right) \qquad (11)$$

(11)式においてa, b, k, pおよびDは既知であるからVはαおよびβの関数となる，従ってVの最小値を求めるにはαまたはβの一方を一定にしてVを画くと極小値が得られ，その包絡線の最小値のα, βを求めればよい。斯してα, βが求まればこれを(10)式に代入してw_0が求められ，変形は(1)式で表わされる。

4 1次元版の変形（版の幅を一定(=b)）

(1)式の w を

$$w = w_0 e^{-\alpha x}\sin(\alpha x+\frac{\pi}{4}) \tag{12}$$

と仮定して(2),(3)および(4)式に代入し，第1象現のみにつきエネルギをもとめれば

$$V_1=\frac{Dbw_0^2\alpha^3}{4} \quad V_2=\frac{3kbw_0^2}{16\alpha} \quad V_3=\frac{pbw_0}{\sqrt{2}\alpha}(1-e^{-\alpha a}\cos\alpha a) \tag{13}$$

(13)式を(6)式の第1式に代入すると

$$w_0=\frac{p}{k}\cdot\frac{\sqrt{2}\,(1-e^{-\alpha a}\cos\alpha a)}{\frac{D\alpha^4}{k}+\frac{3}{4}} \tag{14}$$

次に(6)式の第2式より

$$(3D\alpha^4-\frac{3}{4}k)w_0-2\sqrt{2}\,p\left[e^{-\alpha a}\left\{(1+\alpha a)\cos\alpha a+\alpha a\sin\alpha a\right\}-1\right]=0 \tag{15}$$

(14)式を(15)式に代入してαが最小となる條件は(16)式が最小になるαを見出せばよいことになる.

$$\frac{20D\alpha^4+3k}{4D\alpha^4+3k}(1-e^{-\alpha a}\cos\alpha a)-2\alpha a\cdot e^{-\alpha a}(\sin\alpha a+\cos\alpha a)=min \tag{16}$$

(16)式において a, k および D は既知であるからαを関数としてグラフを画けば求められる。 またこのαを(14)式に代入すれば一様分布荷重pを受けるときの中央変位w_0が求められる。

5 特別な場合

5.1 弾性床版に集中荷重Pが作用する場合

集中荷重について考えると

$$\left.\begin{aligned}\lim_{a,b\to 0} abp=\frac{P}{4},\quad \lim_{a,b\to 0}\frac{e^{-\alpha a}\cos\alpha a-1}{\alpha}\cdot\frac{e^{-\beta b}\cos\beta b-1}{b}=\alpha\beta\\ \alpha=\beta\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

であるから(7)(8)および(9)式は

$$V_1=\frac{Dw_0^2\alpha^2}{4},\quad V_2=\frac{9kw_0^2}{128\alpha^2},\quad V_3=\frac{Pw_0}{8} \tag{18}$$

次に $\frac{\partial V}{\partial\alpha}=0$ の條件より

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{k}{4D}} \tag{19}$$

を得，また $\frac{\partial V}{\partial\alpha}=0$ の條件より

$$w_0=\frac{P\alpha^2}{4k}\cdot\frac{1}{\frac{D\alpha^4}{k}+\frac{9}{34}} \tag{20}$$

(19)式を(20)式に代入すると

$$w_0=\frac{17}{70}\cdot\frac{P}{\sqrt{kD}} \tag{21}$$

を得る。勿論(20)式は(10)式からも求められる。

5.2 1次元版に集中荷重Pが作用する場合

(13)式は

$$V_1=\frac{Dbw_0^2\alpha^3}{4} \quad V_2=\frac{3kbw_0^2}{16\alpha} \quad V_3=\frac{Pw_0}{4\sqrt{2}} \tag{22}$$

(6)式の第1式より

$$w_0=\frac{P\alpha}{kb}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\frac{4D\alpha^4}{k}+3} \tag{23}$$

(6)式の第2式より

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{k}{4D}} \tag{24}$$

となり(19)式と一致する。

(24)式を(23)式に代入すると

$$w_0=\frac{P\alpha}{2\sqrt{2}\,kb} \tag{25}$$

となる。

(24)および(25)式は当然のことであるがClarkの式と一致する（但し $4F=P$, $2w=b$ の関係であることに注意）

6 固有振動数

1) A.D. Kerr : Elastic and Viscoelastic Foundation Models. Jour. of Appl. Mech. Sep. 1964. pp 491～498

2) D.C. Clark : On the Kinetic Behavior of Roads. Proc. of the 40th Annual Meeting 1961. Highway Research Board

3) G.F. Sowers and A.B. Vesić : Stress Distribution beneath Pavements of Different Rigidities. Proc. of the 5th Inter. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. Vol II 1961