

大阪市立大学

倉田 宗章

明石工業高専

高 端 宏 直

大阪市立大学

谷 平 勉

① まえがき……従来弾性基礎上のはりおよび板の解法は負の反力を考慮

したことが多かった。(図-1参照) 本文では差分法を用いて負の反力を考
ない非線形の場合についての解法と計算結果を示した。はりについての非
線形問題の解は曲げ問題として領域を分割して境界条件を満足させる方法や、
HevisideのStep Functionを用いた解法がみられる。差分法を用いた理由とし

ては、線形問題として式を立てその演算結果がたわみ $w(x)$ の表の根拠係数を
0とおきつぎの演算に入り、逐次演算を繰返し収束させることができるからである。すなわち
逐次近似法により非線形問題を取扱う方法である。はじめにはりについて
の結果を参考までにのべて、ついで本題の板についてのべる。

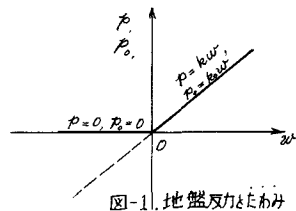


図-1 地盤反力とたわみ

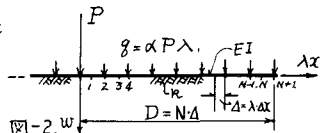


図-2 W

② はり……集中荷重 P と等分布荷重 g が作用した無限長のはりを用いた。実際には図-2のような片

側を N 等分した有限長のはりとして解く。基礎方程式 $\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{4\lambda^4}{k} (EI\lambda^4 = \frac{k}{4EI}, \bar{g} = g + \frac{P}{\Delta x})$ より代表格点
の差分表示はつぎの通りである。
$$\frac{1}{k-2} \quad \frac{-4}{k-2} \quad \frac{6+\delta}{k} \quad \frac{-4}{k+1} \quad \frac{1}{k+2} \quad w = \frac{4P\lambda}{k} \Delta^4 \left(\alpha + \frac{1}{\Delta} \right) \quad \text{---(1)}$$

ここで $\alpha = g/P\lambda$, $\delta = 4\Delta^4$, k : 地盤のはね係数, EI : 曲げ剛性, $\alpha = 2E = 0.02161$ で線形と非線形の限

界を示す。自由端においては $w''' = w'' = 0$ より $w_k = 2w_{k-1} - w_{k-2}$, $w_{k+2} = 4w_k - 4w_{k-1} + w_{k-2}$ の条件を得て差分表

示すと $\frac{2}{k-2} \quad \frac{-4}{k-1} \quad \frac{2+\delta}{k} \quad \frac{-4}{k+1} \quad \frac{1}{k+2} \quad w = \frac{4P\lambda}{k} \Delta^4 \left(\alpha + \frac{1}{\Delta} \right) \quad \text{---(2)}$ となる。(他の項は省略)

曲げモーメントとせん断力の一般式は $M_k = \frac{k}{4\lambda^4} (-w_{k+1} + 2w_k - w_{k-1})$, $Q_k = \frac{k}{8\lambda^4} \{-w_{k+1} + 2(w_{k+1} - w_{k-1}) + w_{k-2}\} \quad \text{---(3)}$

となる。つぎに各図によって計算結果を説明しよう。図-3は $\alpha=0(g=0)$, $D=6$, $N=30$ の場合の逐次演算の
様子である。6回目で収束している。図-4は種々の α についてのたわみ図である。 $\alpha=0.0216$ が浮上る
寸前の状態である。 α が小さくなるにつれて大きく浮上っている。図-5は種々の α に対する曲げモー
メントで図-6はせん断力を示している。最大曲げモーメントおよび最大せん断力については従来の解
法と大きな差はないことがわかる。載荷点下($x=0$)でのたわみの精度は $N=30$ で1%弱, $N=40$ で0.6%の誤差
 $N=60$ で0.3%程度の誤差が生じている。他の点での精度はこれよりよい。

③ 板……本文では四辺自由四隅自由の矩形についてのべる。問題を簡単にするために正方形板とし

図-7のような一辺 $\Delta(\Delta = \lambda_0 \Delta x = \lambda_0 \Delta y)$ の正方形格子とし各格点に記号をつける。弾性基礎上の板の基礎方程

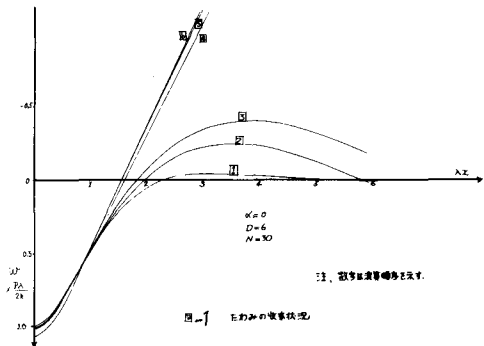


図-1 板のたわみ状況

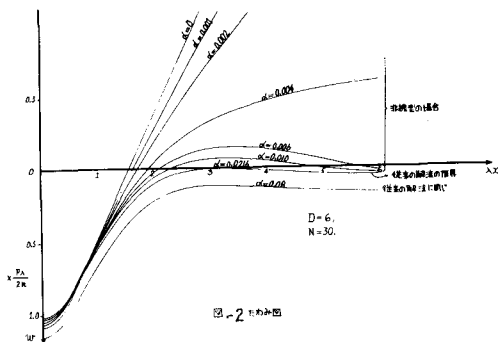


図-2 板のたわみ

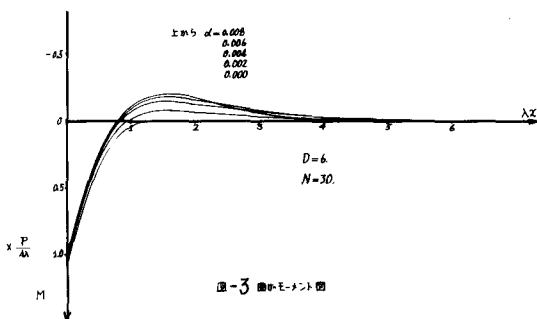


図-3 自由端部変位

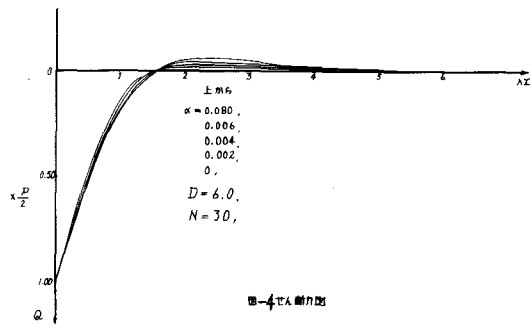


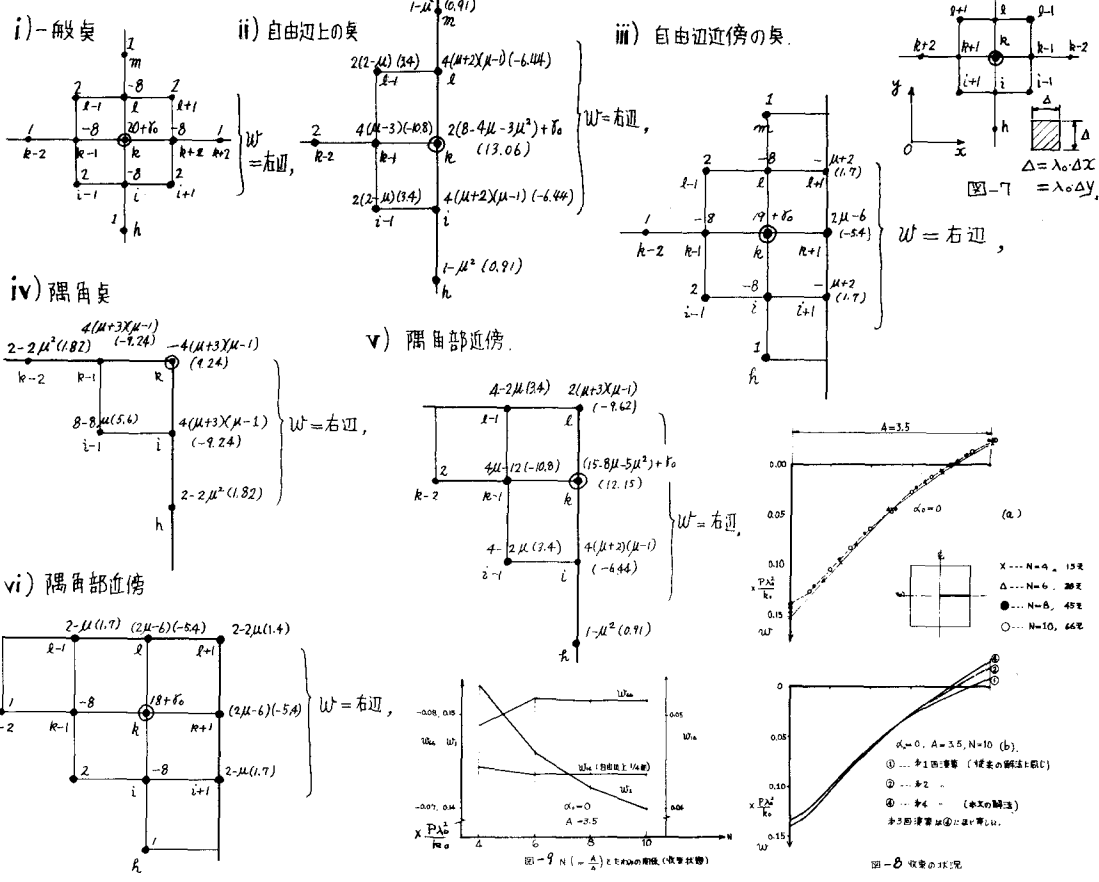
図-4 せん断力

式は次式である。 $\nabla \nabla w + \lambda_0^4 w = \frac{\bar{g}_0}{D_s}$ ----- (4)

ここで $\nabla \nabla w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\lambda_0^4 = \frac{k_0}{D_s}$, $D_s = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ である。 k_0 はばね定数, D_s は板の剛度, h は板厚(本文では一定), μ はポアソン比(本文での計算結果は $\mu=0.3$ の場合)である。上式を一般格点についての差分式に展開すると

$W_k + \epsilon_0 W_k = \frac{P\lambda_0^2}{k_0} (\alpha_0 \Delta^4 + \beta \Delta^2)$ ----- (5) となる。

ここで $W_k = W_{k+2} - 8W_{k+1} + 20W_k - 8W_{k-1} + W_{k-2} + W_m + 2W_{m+1} - 8W_m + 2W_{m-1} + 2W_{i+1} - 8W_i + 8W_{i-1} + W_n$, $\epsilon_0 = \Delta^4$, $\Delta = \lambda_0 \Delta X$, $\alpha_0 = g_0/P\lambda_0^2$, $\bar{g}_0 = g_0 + \frac{P}{(4\Delta X)^2} \cdot \beta = P\lambda_0^2 (\alpha_0 + \frac{1}{\Delta^2} \cdot \beta)$ である。 β の値は集中荷重載荷角の隅角のとき $\beta=4$, 辺上のとき $\beta=2$, その他の角で $\beta=1$ である。つきに主要格点について差分式を図式化するとつぎのようになる。



それでは計算結果について説明しよう。図-8(a)は $\alpha_0=0$ ($\beta_0=0$)で集中荷重 P が中央載荷の場合でたわみと分割数 N との関係を示している。載荷角以外はかなり近い値を示している。図-8(b)は $N=10$ の場合の収束の状況を示している。4回の演算で収束している。

図-9は分割数 N と載荷角下のたわみ w_1 , 隅角 w_{66} , 対称軸上の $1/4$ 点 w_{16} との関係である。 w_{16} , w_{66} は $N \geq 6$ で一定しているが w_1 は N の増加に従って減少している。図10と11は

$\alpha_0=0$ で中央集中荷重載荷の場合の等たわみ線図である。図-10は従来の頁の反力を考慮した場合の解である。図-11は本文の解法による。両者の0-lineが示れていることがよくわかる。図-11, 11-1, 11-2, 11-3, は辺長が $2A=7.0$ で α_0 を変化させた場合である。等分布荷重を序々に増大させた場合に相当する図-11, 11-4, 11-5, 11-6は $\alpha_0=0$ で辺長 $2A$ を小さく変化させた場合である。いずれの場合も0-lineが外側に移動していることがわかる。 $\alpha_0=0$ のとき浮上りの生じない限界の辺長は $A \approx 1.8$ の場合である。

図-12は前図の最大たわみ w_1 と最小たわみ w_{66} に注目してそれらと α_0 および A の関係を示したものである。 w_1 は一定した傾向を示すが w_{66} は大きな変化がみられる。図-13は接地領域($w \geq 0$ の部分)を円曲線で近似して、その半径 $R(=R_0)$

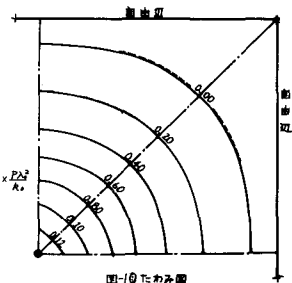


図-8(a)たわみ図

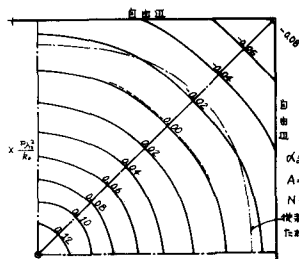


図-8(b)たわみ図(中央載荷)

$\alpha_0=0$
 $A=3.5$
 $N=10$
従来の方法による
たわみの値。
(収束の方法)

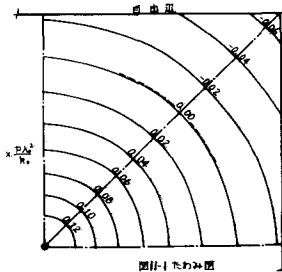


図-10たわみ図

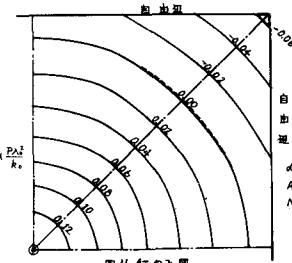


図-11たわみ図

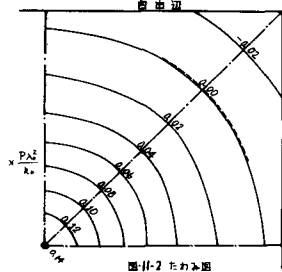


図-11-1たわみ図

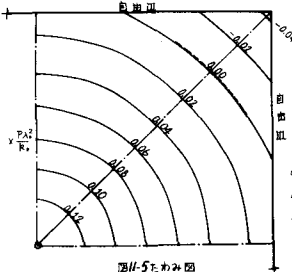


図-11-2たわみ図

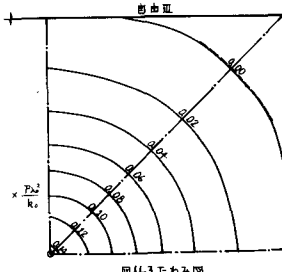


図-11-3たわみ図

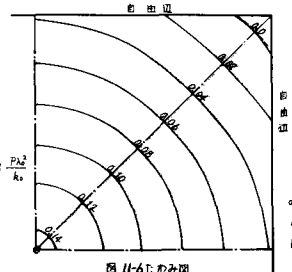


図-11-4たわみ図

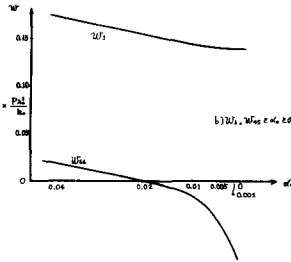
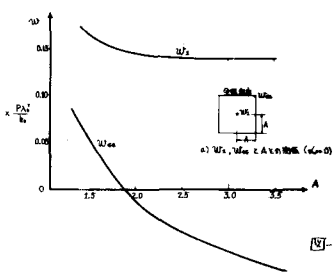


図-12

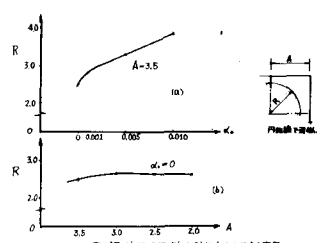


図-13 接地領域 $R(=R_0)$ と α_0 と A の関係。

と $A=3.5$ のときの α_0 との関係と、 $\alpha_0=0$

のときの R と A の関係を示した。 R と α_0 は一次関係的で、 A に対して R はほぼ一定のようである。図-14は対角線と対角線上の主要曲からモーメントについて従来の方法と比較した。大差がないことがわかる。図-15は荷重桌下の M_{x1} と α_0, A との関係である。 M_{x1} は α_0 にほとんど関係なく一定で A とは一次関係的である。図-16は隅角部に P が作用し $\alpha_0=0.005$, $2A=7.0$, $N=8$ の場合の等たねみ曲線である。中央附近が浮上っている。図-17は W_1, W_2 と α_0 および $2A$ との関係である。図-18, 19は自由皿中央に P が作用した場合である。

4. むすび... i. はうおよび板ともに浮上りを生ずる場合は本法により解くことができ、浮上りを生ずる限界の寸法を知ることができた。 ii. 曲がモーメントに関しては両者とも従来の解法でさしつかえない。 iii. 接地部分は円に近似できる。かつ α_0 が一定のときその半径は辺長による影響は少なくほぼ一定である。上記の結果より差分法による解法は実用上よい結果を示すことがわかった。

大阪市大電算機 FACOM 270-30 と使用した事と付記する。 以上。

【参考文献】

1. M. Hetényi: Beams on Elastic Foundation. The Univ. of Michigan Press. 1964.
2. Flügge: Handbook of Eng. Mechanics. McGraw-Hill. 1962, 45-1 (D.G. Ashwell: Nonlinear Problems)
3. 倉田, 高橋, 岩平 弾性基礎上ののはりの一非線形問題. 土木学会21回年次学術講演会 I-28, 1966.
4. 倉田, 高橋, 岩平 弾性基礎上ののはりの実験的一考察. 土木学会関西支部年次学術講演会 I-2, 1966.
5. Tsai, Westmann: Beam on Tensionless Foundation. Jour. of EM. Div. ASCE. Oct 1967. EM.5
6. 原口. 弾性基礎上の矩形板. 山海堂 1964.
7. 能町. 弾性基礎にある四辺, 四隅自由な矩形板の曲げについて. 土木学会論文集 第32号 冊313.

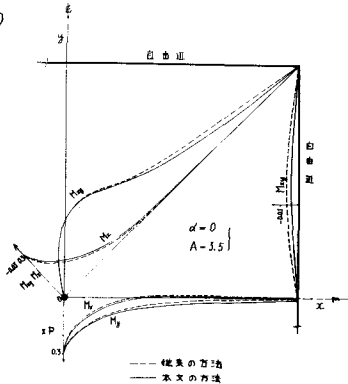


図-14 曲げモーメント図

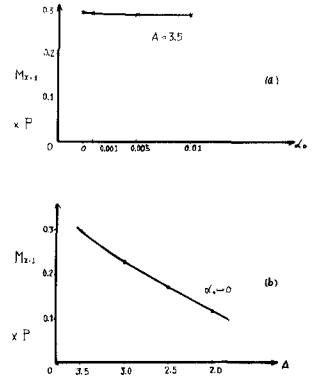


図-15 曲げモーメント M_{x1} (荷重桌) と α_0 および A との関係

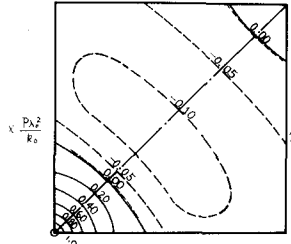


図-16 隅角部 (隅角部に集中荷重, 全面等たねみ曲線)

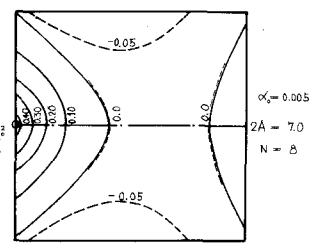
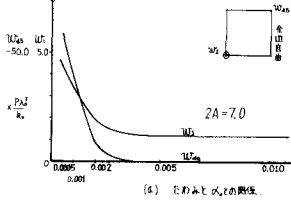
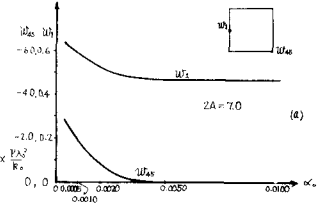


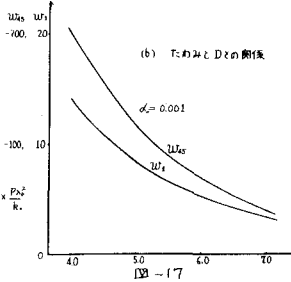
図-18 自由皿中央 (自由皿中央に集中荷重, 全面等たねみ曲線)



(a) 隅角部 α_0 との関係



(b) 自由皿中央 α_0 との関係



(b) 自由皿中央 α_0 との関係

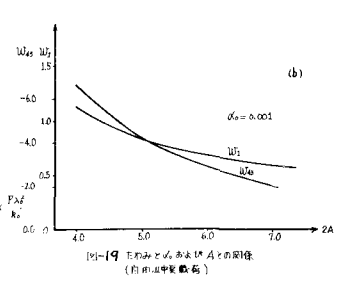


図-19 隅角部 α_0 および $2A$ との関係 (自由皿中央に集中荷重)