I-49

定和分変換によるマルチセル断面平板橋の応力解析

室蘭工業大学　正員　能町純雄　　同 °松岡健一

最近，高速道路等に，板腹に中空を有する平板が橋桁として用いられているが，これは一種のマルチセル構造と考えられる。この種の橋梁のマルチセル断面としての理論的な検討は少ないようである。本研究は，これを，折板理論により，フーリエ定和分変換を用いて，理論的に解析したものである。

1. 変位せん断方程式等

Fig. 1 に示すマルチセル断面を考える。この一折板要素に作用するせん断力と変位との関係については，著者の一人が既に多くの論文で発表している[1]のでここにはその結果のみを記す。

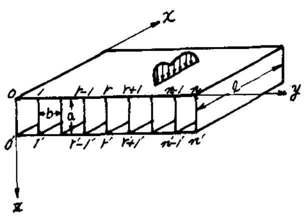

Fig. 1.

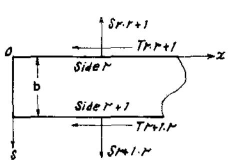

Fig. 2.

$$\dot{T}_{r\cdot r+1}=\frac{N}{6}(2\ddot{u}_r+\ddot{u}_{r+1})+\frac{\nu N}{2b}(\ddot{v}_{r+1}-\ddot{v}_r)+\frac{1}{b}(S_{r\cdot r+1}-S_{r+1\cdot r}) \qquad (1)$$

$$\dot{T}_{r+1\cdot r}=\frac{N}{6}(2\ddot{u}_{r+1}+\ddot{u}_r)+\frac{\nu N}{2b}(\ddot{v}_{r+1}-\ddot{v}_r)+\frac{1}{b}(S_{r+1\cdot r}-S_{r\cdot r+1}) \qquad (2)$$

ここで，u，v は x，s 方向の変位であり，T，S はそれぞれせん断力および法線力である。また $N=Ebt/(1-\nu^2)$ であり，$\dot{u}=\partial u/\partial x$，$t$ は板厚である。

さらに，節点 r における変位と法線力の関係は

$$\frac{2N}{b^2}(v_{r+1}-v_r)=-\frac{\nu N}{b}(\dot{u}_{r+1}-\dot{u}_r)+S_{r\cdot r+1}+S_{r+1\cdot r} \qquad (3)$$

$$\frac{Gbt}{2}(\ddot{v}_{r+1}+\ddot{v}_r)=-Gt(\dot{u}_{r+1}-\dot{u}_r)+S_{r\cdot r+1}-S_{r+1\cdot r} \qquad (4)$$

$$\frac{Gat_0}{2}(\ddot{w}_r+\ddot{w}_{r'})=Gt_0(\dot{u}_r-\dot{u}_{r'})+S_{r\cdot r'}-S_{r'\cdot r} \qquad (5)$$

また曲げモーメントは

$$M_{r\cdot r+1}=2K\left\{2\theta_r+\theta_{r+1}-\frac{3}{b}(w_{r+1}-w_r)\right\} \qquad (6)$$

$$M_{r+1\cdot r}=2K\left\{2\theta_{r+1}+\theta_r-\frac{3}{b}(w_{r+1}-w_r)\right\} \qquad (7)$$

$$M_{r\cdot r'}=2K_0\left\{2\theta_r+\theta_{r'}-\frac{3}{a}(v_r-v_{r'})\right\} \qquad (8)$$

$$bX_{r\cdot r+1}=-6K\left\{\theta_r+\theta_{r+1}-\frac{2}{b}(w_{r+1}-w_r)\right\} \qquad (9)$$

$$aX_{r\cdot r'}=-6K_0\left\{\theta_r+\theta_{r'}-\frac{2}{a}(v_r-v_{r'})\right\} \qquad (10)$$

$$X_{r+1\cdot r}=X_{r\cdot r+1}\ ,\quad X_{r\cdot r'}=X_{r'\cdot r} \qquad (11)$$

ただし，w は z 方向変位，X は節モーメントにより生ずるせん断力，t，t_0 は上床板および隔壁の厚さ，a，b は上下床板の間隔および，隔壁間の間隔であり，$K=Et^3/12b(1-\nu^2)$，$K_0=Et_0^3/12a\times(1-\nu^2)$ である。

2. 節点における力のつり合および境界条件

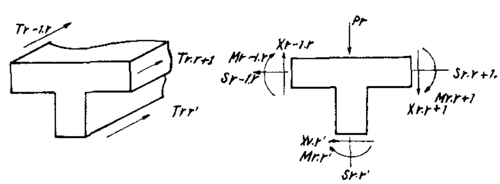

Fig. 3. Forces around Joint r.

節点における力の状態は Fig. 3 のようになるので，力のつり合式は

$$S_{r\cdot r+1}-S_{r\cdot r-1}-X_{r\cdot r'}=0 \qquad (12)$$

$$S_{r\cdot r'}+P_r+X_{r\cdot r+1}-X_{r\cdot r-1}=0 \qquad (13)$$

$$T_{r\cdot r+1}+T_{r\cdot r-1}+T_{r\cdot r'}=0 \qquad (14)$$

$$M_{r\cdot r+1}+M_{r\cdot r-1}+M_{r\cdot r'}=0 \qquad (15)$$

境界においては（$r=0$ で）

$$S_{0\cdot 0'}+P_0+X_{0\cdot 1}=0 \qquad (16)$$

$$T_{0\cdot 0'}+T_{0\cdot 1}=0 \qquad (17)$$

$$M_{0.0}' + M_{0.1} + M_0 = 0 \qquad (18)$$

M_0 は外力モーメントである。(12)〜(18)式に(1)〜(11)式の関係を代入すれば，節点 r および境界における，変位と断面力の関係式が求められる。下床板の節点 r' についても同様である。

3. 上下床板等厚の場合

この場合，

$$u_r + u_{r'} = 0,\quad v_r + v_{r'} = 0,\quad \theta_r - \theta_{r'} = 0,$$

であり，

$$S_r = (S_{r.r+1} + S_{r.r-1})/2$$

とおけば，$S_r + S_{r'} = 0$，

また，(5)式において $(S_{r.r'} - S_{r'.r})$ の項は他の項に比べて無視出来程小さいと考えられるので，

$$w_r = 2u_r/a,$$

となる。(12)〜(15)式に(1)〜(11)式の関係を代入して得られた式に，上の関係を代入し，x 方向にフーリエ変換，r 方向に定和分変換を行ない，x 方向では単純支持であり，支点上は剛な横桁で閉じられているものとすれば，w, v, θ, S のフーリエ変換した値は次のようになる。

$$\overline{W}_{i.m}\left[\left\{\frac{Na}{12}(6-D_i)+\frac{N_0a}{12}\right\}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4+\frac{Gat}{2b}D_i\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\frac{24K}{ab^2}D_i\right]+\left(\frac{\nu N}{b}+Gt\right)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{i\pi}{n}\overline{V}_{i.m}$$
$$-\frac{24K}{ab}\sin\frac{i\pi}{n}\Theta_{i.m}=\frac{1}{a}P_{i.m}+\left\{\frac{Na}{12}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4-\frac{Gat}{2b}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\frac{24K}{ab^2}\right\}\sin\frac{i\pi}{n}\left((-1)^i\overline{W}_{n.m}-\overline{W}_{0.m}\right) \qquad (19)$$

$$Gat\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2D_i\overline{W}_{i.m}+\left\{2Gbt\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\frac{48K_0}{a^2}\right\}\sin\frac{i\pi}{n}\overline{V}_{i.m}$$
$$-2D_iH_{i.m}-\frac{24K_0}{a}\sin\frac{i\pi}{n}\Theta_{i.m}$$
$$=-Gat\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{i\pi}{n}\left((-1)^i\overline{W}_{n.m}-\overline{W}_{0.m}\right)$$
$$+2\sin\frac{i\pi}{n}\left((-1)^iH_{n.m}-H_{0.m}\right) \qquad (20)$$

$$\frac{Nab\nu}{2}(4-D_i)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\overline{W}_{i.m}+\left(\frac{24b^2}{a^2}K_0+aN\right)\sin\frac{i\pi}{n}\overline{V}_{i.m}$$
$$+b^2(4-D_i)H_{i.m}-\frac{12b^2}{a}K_0\sin\frac{i\pi}{n}\Theta_{i.m}$$
$$=\frac{Nab\nu}{2}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{i\pi}{n}\left((-1)^i\overline{W}_{n.m}-\overline{W}_{0.m}\right)$$
$$+b^2\sin\frac{i\pi}{n}\left((-1)^iH_{n.m}-H_{0.m}\right) \qquad (21)$$

$$\frac{12K}{b}\sin\frac{i\pi}{n}\overline{W}_{i.m}+\frac{12K_0}{a}\overline{V}_{i.m}-\{2K(6-D_i)+6K_0\}\Theta_{i.m}$$
$$=(-1)^iM_{n.m}+M_{0.m}-3K_0\left(1-\frac{2K_{0.0}}{K_0}\right)\Big\{(-1)^i$$
$$\times\left(\theta_{n.m}-\frac{2}{a}v_{n.m}\right)+\left(\theta_{0.m}-\frac{2}{a}v_{0.m}\right)\Big\}$$
$$+\frac{3K}{b}(4-D_i)\left((-1)^i\overline{W}_{n.m}-\overline{W}_{0.m}\right) \qquad (22)$$

ここで $D_i = 2\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right)$，

(19)〜(22)式を連立方程式として解き $\overline{W}_{i.m}$，$\overline{V}_{i.m}$，$\Theta_{i.m}$，$H_{i.m}$ が求められると，w_r，v_r，θ_r，S_r は次により求められる。

$$w_r=\frac{4}{n\cdot l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\overline{W}_{i.m}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{i\pi}{n}r \qquad (23)$$

$$v_r=\frac{4}{n\cdot l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\overline{V}_{i.m}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{i\pi}{n}r \qquad (24)$$

$$\theta_r=\frac{4}{n\cdot l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\Theta_{i.m}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{i\pi}{n}r \qquad (25)$$

$$S_r=\frac{4}{n\cdot l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}H_{i.m}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{i\pi}{n}r \qquad (26)$$

また(19)〜(22)式中の $\overline{W}_{0.m}$，$\overline{W}_{n.m}$，$H_{0.m}$，$H_{n.m}$，$\theta_{0.m}$，$\theta_{n.m}$，$v_{0.m}$，$v_{n.m}$ は(16)，(17)の境界条件および(19)〜(22)式で $i=0, n$ とした式より求められる。

4. 数値計算例

$l = 100$ cm，$a = b = 10$ cm，$t = t_0 = 0.5$ cm，$t_{0.0} = 0.25$ cm，$E = 2.1\times10^6$ kg/cm²，$\nu = 0.3$ について集中荷重が $r=0$ および $r=n$ にスパン中央に作用した場合の結果を Fig. 4, 5 に示す。

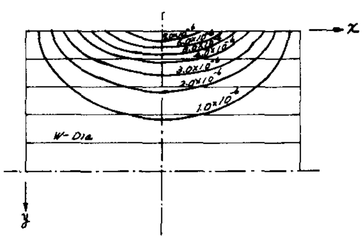

Fig. 4. w Diagram

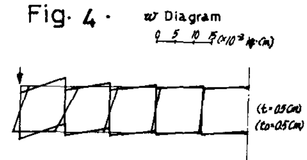

Fig. 5. Bending Moment ($x = \frac{l}{2}$)

5. 結び

このような問題に定和分変換を用いると，$(4n)^2$ 元の連立方程式を，4元の連立方程式 $n-1$ 回の解法に変換出来るので，非常に有利である。

[参考文献]

1) 能町純雄：剛なダイヤフラムで等区画に分けられる連続長方形箱桁の曲げねじりについて（土木学会論文集 第146号）等
2) S. G. Nomachi: A Note on Finite Fourie Transforms concerning Finite Integration. (Trans. Mem. MIT Vol. 1, No. 4)