

九州大学 工学部 正 員 山崎 徳也

" " " 彦坂 熙

" " 学生員 熊谷 恒一郎

1. 緒言

板厚方向の不均一温度分布に起因する板の変形と応力の解析に関しては古くから多くの研究がなされてきたが、その対象は等方性板に限られており、例えば本題の鉄筋コンクリートスラブ(RCスラブと略す)のごとき異方性板にそのまま適用することはできない。

本研究は、RCスラブが板厚方向に直線変化する温度分布を受ける場合の曲げの基礎微分方程式を導いたのち、一対辺単純支持スラブに対する厳密解を求め、数値計算によりコンクリートに生ずる引張応力の危険度を吟味検討するとともに、乾燥収縮応力との関連性を明らかにせんとしたものである。なお、不均一温度分布に起因する応力は一般に面内二次元応力と面外曲げ応力の合成されたものであるが、本論文ではこのうち面外曲げ応力のみを取り扱うこととする。

2. 基礎微分方程式

図-1のごとき、相隣る二辺の長さがそれぞれ a, b で厚さ h のRCスラブを考え、スラブ厚さの中央面を基準面にとる。基準面内で二辺に沿ってそれぞれ x, y 軸を、また垂直下向に z 軸を設け、 x, y 軸に垂直な断面をそれぞれ x 断面、 y 断面と呼ぶことにする。

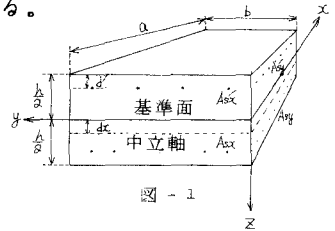


図 - 1

いま、温度分布が図-2のごとき厚さ方向に直線的に変化するものとすれば、スラブの任意点 (x, y, z) の温度分布を表わす関数は一般に次式で表わされる。

$$T = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) \quad (1)$$

本論文では面内応力を無視するゆえ $T_1(x, y) = 0$ とおき平面保持の仮定を用いれば、任意点 (x, y, z) のひずみは z 方向のたわみ w により次式のごとき表わされる。

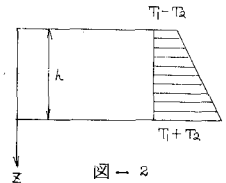


図 - 2

$$\epsilon_x = -(z-d) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{z}{h} \epsilon_1, \quad \epsilon_y = -(z-d) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{z}{h} \epsilon_2, \quad \gamma_{xy} = -2(z - \frac{d+d_1}{2}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

ここに、 d, d_1 はそれぞれ x, y 断面の中立軸の z 座標、また ϵ_1 は鉄筋およびコンクリートの線膨張係数(両者は近似的に等しい)である。

コンクリート応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、引張鉄筋応力 $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}$ および圧縮鉄筋応力 $\sigma'_{sx}, \sigma'_{sy}, \tau'_{sxy}$ は式(2)のひずみを用いて次のごとき表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_c}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E_c}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), & \tau_{xy} &= \frac{E_c}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \sigma_{sx} &= E_s (\epsilon_x)_{z=\frac{h}{2}-d}, & \sigma_{sy} &= E_s (\epsilon_y)_{z=\frac{h}{2}-d}, & \tau_{sxy} &= \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} (\gamma_{xy})_{z=\frac{h}{2}-d} \\ \sigma'_{sx} &= E_s (\epsilon_x)_{z=\frac{h}{2}+d}, & \sigma'_{sy} &= E_s (\epsilon_y)_{z=\frac{h}{2}+d}, & \tau'_{sxy} &= \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} (\gamma_{xy})_{z=\frac{h}{2}+d} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 ν はポアソン比、 E は弾性係数を表わし、添字の c および s はそれぞれコンクリートおよび鉄筋の区別を示す。

式(2)および(3)を用いれば、基準面のまわりのモーメントの釣合条件より、 x 断面、 y 断面の単位巾当たりの曲げモーメント M_x, M_y および捩りモーメント M_{xy}, M_{yx} が次式のごとき求められる。

$$\begin{aligned} M_x &= -(D_x + D_{xx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu_c D_c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \{G_{xx} + (1 + \nu_c) D_c\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} T_2, & M_{xy} &= (1 - \nu_c) D_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{D}_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_y &= -(D_c + D_{yy}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_c D_c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \{G_{yy} + (1 + \nu_c) D_c\} \frac{\partial \alpha}{\partial y} T_2, & M_{yx} &= -(1 - \nu_c) D_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \bar{D}_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{ここに } D_c = \frac{E_c h^3}{12(1 - \nu_c^2)}, \quad \bar{D}_{xx} = \frac{E_c}{1 + \nu_c} \left(\frac{h}{2} - d \right) \left\{ \left(\frac{h}{2} - d - \frac{dx + dy}{2} \right) A_{xx} + \left(\frac{h}{2} - d + \frac{dx + dy}{2} \right) A_{xx} \right\} \quad (5)$$

$$D_{xx} = E_c \left(\frac{h}{2} - d \right) \left\{ \left(\frac{h}{2} - d - dx \right) A_{xx} + \left(\frac{h}{2} - d + dx \right) A_{xx} \right\}, \quad G_{xx} = E_c \left(\frac{h}{2} - d \right)^2 (A_{xx} + A_{xx})$$

また、 $D_{yy}, \bar{D}_{yy}, G_{yy}$ は式 (5) の $D_{xx}, \bar{D}_{xx}, G_{xx}$ における添字 x を y に置き換えたものである。

スラブの z 方向の力の釣合条件 $\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = 0$ に式 (4) を代入すれば所要の基礎微分方程式が導かれ、途中演算を省略して結果のみを示せば次のごとくである。

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \{G_{xx} + (1 + \nu_c) D_c\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \{G_{yy} + (1 + \nu_c) D_c\} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここに } \beta_1 = D_c + D_{xx}, \quad \beta_2 = D_c + D_{yy}, \quad \beta_3 = D_c + \frac{\bar{D}_{xx} + \bar{D}_{yy}}{2}$$

3. 一般解

本論では $T_2 = \text{const}$, 即ち温度分布が z のみの関数である場合を考へ、上記の基礎方程式の解が次式にて表わされるものと仮定する。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin \frac{n\pi}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (7)$$

ここに、 X_n, Y_m は x, y のみの関数である。

式 (7) を式 (6) に代入すれば X_n および Y_m に関する常微分方程式がえられ、解いて Y_m および X_n が次のごとく求められる。

$$Y_m = A_m \cosh k_1 \frac{a}{2} y \cosh k_2 \frac{a}{2} y + B_m \cosh k_1 \frac{a}{2} y \sinh k_2 \frac{a}{2} y + C_m \sinh k_1 \frac{a}{2} y \cosh k_2 \frac{a}{2} y + D_m \sinh k_1 \frac{a}{2} y \sinh k_2 \frac{a}{2} y \quad (8)$$

$$X_n = E_n \cosh k_1 \frac{b}{2} x \cosh k_2 \frac{b}{2} x + F_n \cosh k_1 \frac{b}{2} x \sinh k_2 \frac{b}{2} x + G_n \sinh k_1 \frac{b}{2} x \cosh k_2 \frac{b}{2} x + H_n \sinh k_1 \frac{b}{2} x \sinh k_2 \frac{b}{2} x$$

$$\text{ここに } k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_3}{\beta_2} \right)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

また、 $A_m \sim D_m, E_n \sim H_n$ は境界条件より定まる積分定数である。

4. たわみ角の一般表示

図-3のごとく、一対辺 $x=0, x=a$ が単純支持され、他対辺 $y=0, y=b$ に端モーメント M_A, M_B が作用するスラブを考える。

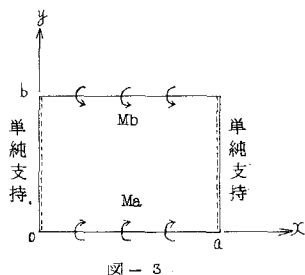
まず、 $x=0, x=a$ における単純支持の境界条件 $w=0, M_x=0$ より

$$\text{次式をうる。} \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D_x}{\beta_1} T_0 = 0 \quad (9)$$

$$\text{ここに } D_x = G_{xx} + (1 + \nu_c) D_c, \quad T_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} T_2$$

式 (8) を式 (9) に代入すれば未知の積分定数 E_n, F_n, G_n, H_n に関する四元連立一次方程式がえられ、これを解いて上記積分定数を決定すれば次のごとくである。

$$\begin{aligned} E_n &= 0, \quad F_n = \frac{K_x}{2k_1 k_2 \beta_2} \left(\frac{b}{\pi} \right)^3 \frac{\sinh k_1 \frac{b}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\cosh k_1 \frac{b}{2} \sin \frac{n\pi}{2} + \cosh k_2 \frac{b}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}, \quad G_n = \frac{K_x}{2k_1 k_2 \beta_2} \left(\frac{b}{\pi} \right)^3 \frac{\sinh k_1 \frac{b}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\cosh k_1 \frac{b}{2} \sin \frac{n\pi}{2} + \cosh k_2 \frac{b}{2} \sin \frac{n\pi}{2}} \\ H_n &= -\frac{K_x}{2k_1 k_2 \beta_2} \left(\frac{b}{\pi} \right)^3, \quad \text{ここに } \beta_n = \frac{n\pi}{b} a, \quad K_x = \frac{D_x}{b} T_0, \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (10)$$



次に $y=0, y=b$ における端モーメントが $M_A = \sum_{m=1}^{\infty} M_{Am} \sin \frac{m\pi}{a} x$, $M_B = \sum_{m=1}^{\infty} M_{Bm} \sin \frac{m\pi}{a} x$ のごとく正弦フーリエ級数に展開されるものとする。この二辺における境界条件 $w=0$, $(M_y)_{y=0} = M_A$, $(M_y)_{y=b} = M_B$ より残りの積分定数 A_m, B_m, C_m, D_m が次式で求められる。

$$B_m = \frac{\sinh k a \alpha_m}{2k_1 k_2 \beta_2 (\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m)} \left[\left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 (M_{Am} \cosh k a \alpha_m - M_{Bm} \cosh k a \beta_m) + K_y \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3 (\cosh k a \alpha_m - \cosh k a \beta_m) \right]$$

$$C_m = \frac{\sinh k a \alpha_m}{2k_1 k_2 \beta_2 (\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m)} \left[\left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 (M_{Bm} \cosh k a \alpha_m - M_{Am} \cosh k a \beta_m) + K_y \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3 (\cosh k a \alpha_m - \cosh k a \beta_m) \right] \quad (11)$$

$$A_m = 0, \quad D_m = -\left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \frac{M_{Am}}{2k_1 k_2 \beta_2} - \frac{K_y}{2k_1 k_2 \beta_2} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3 \quad \text{ここに } \alpha_m = \frac{m\pi b}{a}, \quad K_y = \frac{4\beta_2}{a} T_0, \quad m=1, 3, 5, \dots$$

さて、 $y=0, y=b$ におけるたわみ角 $\frac{\partial w}{\partial y}$ も次式のごとく正弦フーリエ級数で表わされるものとする。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{Am} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{Bm} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (12)$$

式(7)を用いて式(12)の左辺を算定すれば

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \sum_{m=1,3,5} \left(\frac{dV_m}{dy} \right)_{y=0} \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{n=7,9,11} X_n \left(\frac{m\pi}{b} \right), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \sum_{m=7,9,11} \left(\frac{dV_m}{dy} \right)_{y=b} \sin \frac{m\pi}{a} x - \sum_{n=1,3,5} X_n \left(\frac{m\pi}{b} \right) \quad (13)$$

ここで $\sum X_n \left(\frac{m\pi}{b} \right)$ を正弦フーリエ級数に展開すれば次式をうる。

$$\sum_{n=7,9,11} X_n \left(\frac{m\pi}{b} \right) = \sum_{m=7,9,11} R_m \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \text{ここに } R_m = \frac{K_y}{2k_1 k_2 \beta_2} \frac{k_2 a \sinh k a \alpha_m - k_1 \sinh k a \beta_m}{\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m} \quad m=7, 9, 11, \dots \quad (14)$$

式(12)に式(13) (14)を代入し、さらに式(8)および(11)を用いて整理すれば、結局 θ_{Am}, θ_{Bm} が次式にて一般表示されることになる。

$$\theta_{Am} = \frac{\left(\frac{a}{m\pi} \right)}{2k_1 k_2 \beta_2 (\cosh k a \alpha_m - \cosh k a \beta_m)} \left[M_{Am} (k_2 \sinh k a \alpha_m \cosh k a \beta_m - k_1 \sinh k a \beta_m \cosh k a \alpha_m) - M_{Bm} (k_2 \sinh k a \alpha_m \cosh k a \beta_m - k_1 \cosh k a \alpha_m \sinh k a \beta_m) \right]$$

$$+ \frac{K_y}{2k_1 k_2 \beta_2} \frac{k_2 \sinh k a \alpha_m + k_1 \sinh k a \beta_m}{\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 + R_m \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \quad (15)$$

$$\theta_{Bm} = \frac{\left(\frac{a}{m\pi} \right)}{2k_1 k_2 \beta_2 (\cosh k a \alpha_m - \cosh k a \beta_m)} \left[M_{Am} (k_2 \sinh k a \alpha_m \cosh k a \beta_m - k_1 \cosh k a \alpha_m \sinh k a \beta_m) - M_{Bm} (k_2 \sinh k a \alpha_m \cosh k a \beta_m - k_1 \sinh k a \alpha_m \cosh k a \beta_m) \right]$$

$$- \frac{K_y}{2k_1 k_2 \beta_2} \frac{k_2 \sinh k a \alpha_m + k_1 \sinh k a \beta_m}{\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 - R_m \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2$$

式(10), (11) および (15) を用いれば、一対辺単純支持、他対辺が固定および単純支持の任意の組合せからなる R C スラブの積分定数をすべて決定でき、さらに多スパン連続スラブにも容易に拡張応用が可能である。

5. 計算例

(i) 四辺単純支持スラブ $y=0, y=b$ における単純支持の境界条件より式(11)において $M_{Am} = M_{Bm} = 0$ とおけば、積分定数 A_m, B_m, C_m, D_m は次のごとく決定される。

$$A_m = 0, \quad D_m = -\frac{K_y}{2k_1 k_2 \beta_2} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3, \quad B_m = -\frac{\sinh k a \alpha_m}{\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m} D_m, \quad C_m = -\frac{\sinh k a \beta_m}{\cosh k a \alpha_m + \cosh k a \beta_m} D_m \quad (16)$$

式(10)および(16)によって決定された積分定数を用い、辺長 a 、スラブ厚さ $h = a/20$ 、鉄筋比が断面、 y 断面ともに 3% の四辺単純支持鉄筋正方形スラブについて曲げモーメントを算定し、結果を

図-4に示す。ただしコンクリートおよび鉄筋の弾性係数、線膨張係数は次の値を用いるものとする。

$$E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 \quad \alpha = 1.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

$$E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

曲げモーメント M_x は境界 $y=0, y=b$ において最大値 $(M_x)_{\max} = 0.131 \times 2\alpha T_2 E_c h^2$ となり、例えばスラフの上下面の温度差 $2T_2 = 10^\circ\text{C}$ とすれば、

$$(\sigma_{cx})_{\max} = 16.5 \text{ kg/cm}^2 \text{ となる。}$$

(ii) 一対辺固定、他対辺単純支持スラフ $y=0, y=b$ における固定の条件より式(15)において $\theta_A = \theta_B = 0$ とおけば、端モーメント M_A, M_B は次式にて表わされる。

$$M_A = M_B = -\left(\frac{A}{m\pi}\right) \left[K_y + \frac{K_x}{\mu} \frac{k_2 \sinh k_2 \alpha_m - k_1 \sinh k_1 \alpha_m}{k_2 \sinh k_2 \alpha_m + k_1 \sinh k_1 \alpha_m} \right] \quad (17)$$

式(17)を用いて式(11)を整理すれば所要の積分定数 A_m, B_m, C_m, D_m が容易に決定される。

iii) の場合と同様に、辺長 a 、スラフ厚さ $h = a/20$ の正方形スラフについて、たわみおよび曲げモーメントを算定し結果を図-5, 6, 7に示す。ただし鉄筋比は単純スパン方向に3%、単鉄筋断面、固定スパン方向には引張圧縮鉄筋とも1.5%の複鉄筋断面とする。

図より明らかなごとく、曲げモーメント M_y が固定辺において極めて大きくなり、その最大値は $(M_y)_{\max} = 0.282 \times 2\alpha T_2 E_c h^2$ 即ち $2T_2 = 10^\circ\text{C}$ とすると $(\sigma_{cy})_{\max} = 35.5 \text{ kg/cm}^2$ にも達する。曲げモーメント M_x は iii) の場合と大差ないが、境界付近の最大値は ii) の場合をやや上まわっている。

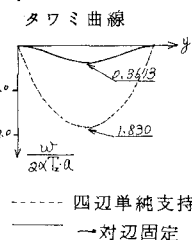


図-5

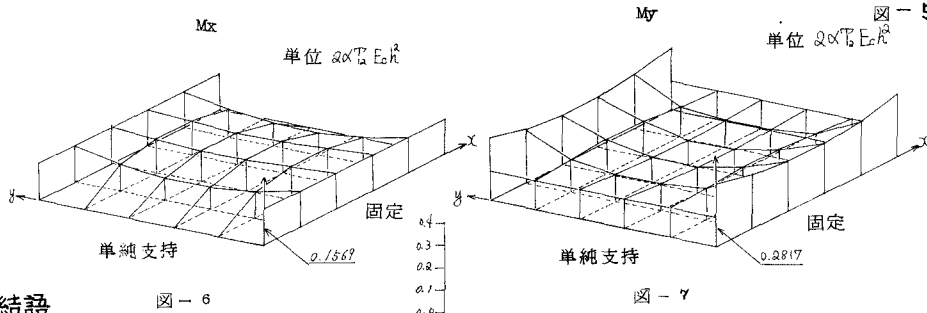


図-6

図-7

6. 結語

本研究の結果、板厚方向に直線変化する温度分布を受けるRCスラフの曲げ応力の最大値が境界付近に現れ、特に固定端において著しく大きくなることが判明した。この傾向は著者らが文献(1)で求めたRCスラフの乾燥収縮応力と類似しており、今後なおクリープの影響や境界付近での配筋量の変化など吟味検討の余地を残すとはいえ、本論文の成果はRCスラフの設計における温度応力および乾燥収縮応力の取り扱いに指針を与えるものと確信する。

参考文献(1) 山崎彦坂, 熊谷: 鉄筋コンクリートスラフの乾燥収縮曲げ応力解析
昭和43年度 土木学会西部支部 研究発表会 論文集, 昭和44年2月