

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 正員 〇彦坂 照

1. 緒言

コンクリート構造物が持続荷重を受ける場合、その変形と内部応力がクリープにより時々刻々変化しつつあることは周知のごとくであり、その理論研究は古くから行われてきたが、ほとんどが大きさ一定の持続荷重を受ける場合を対象としたものである。これに対し、繰返し荷重や時間的に任意に変化する荷重を受ける場合のクリープ解析は、未だはりや柱のごとき簡単な単軸構造物に限られており、本題のごとく鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープを取り扱ったものは全く見受けられない。

本論文は、先に著者が発表した一定持続荷重を受ける鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解法を拡張し、任意の時間間隔で大きさが変化する持続荷重を受けるスラブのクリープ挙動を追跡解明せんとするものである。なお、演算簡易化のため次項を仮定する。

- (i) 乾燥収縮の影響は無視する。
- (ii) 任意時刻におけるスラブの断面で平面保持の仮定が成立するものとし、かつ Davis-Glanville の法則を認める。
- (iii) プレーンコンクリートのクリープ関数は文献(2)と同じく Arutyunyan 型の実験式を用いるが、コンクリートの弾性係数の時間的変化は無視する。

2. コンクリートの応力-ひずみ関係式

コンクリートの材令 t_0 なる構造物が、図-1(a)のごとく任意の時刻 $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ で大きさの変化する持続荷重を受けるものとする。 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ なる任意の時刻 t において、任意の直交軸 x, y に関するコンクリートの応力をそれぞれ $\sigma_{xn}(t), \sigma_{yn}(t)$ で表わせば、その時刻におけるクリープを考慮したコンクリートの総ひずみ $\varepsilon_{xn}(t), \varepsilon_{yn}(t)$ は次式で求められる。

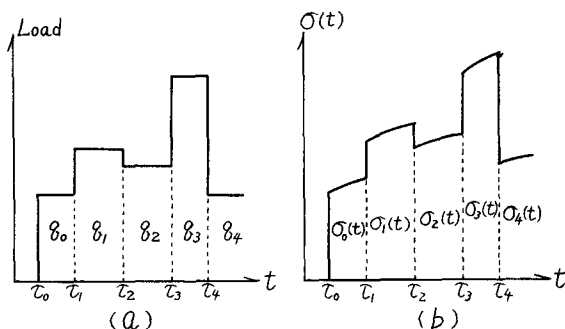


図 - 1

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xn}(t) &= \frac{\sigma_{xn}(t) - \nu \sigma_{yn}(t)}{E_c} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\sigma_{xi}(\tau) - \nu \sigma_{yi}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - \int_{t_n}^t [\sigma_{xn}(\tau) - \nu \sigma_{yn}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \\ \varepsilon_{yn}(t) &= \frac{\sigma_{yn}(t) - \nu \sigma_{xn}(t)}{E_c} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\sigma_{yi}(\tau) - \nu \sigma_{xi}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - \int_{t_n}^t [\sigma_{yn}(\tau) - \nu \sigma_{xn}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに E_c, ν : コンクリートの弾性係数およびポアソン比

$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$: クリープ関数

$\varphi(\tau)$: 材令 τ の関数, γ : 実験により定まる定数

式(1)を $\sigma_{xn}(t), \sigma_{yn}(t)$ について解けば、次の結果をうる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{xn}(t) &= Q_{xn}(t_n) + \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \left\{ \dot{Q}_{xn}(t_n) + \frac{E_c}{1-\nu^2} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \ddot{\epsilon}_{xn}(\tau) + r \dot{\epsilon}_{xn}(\tau) + \nu (\ddot{\epsilon}_{yn}(\tau) + r \dot{\epsilon}_{yn}(\tau)) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right\} d\tau \\ Q_{yn}(t) &= Q_{yn}(t_n) + \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \left\{ \dot{Q}_{yn}(t_n) + \frac{E_c}{1-\nu^2} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \ddot{\epsilon}_{yn}(\tau) + r \dot{\epsilon}_{yn}(\tau) + \nu (\ddot{\epsilon}_{xn}(\tau) + r \dot{\epsilon}_{xn}(\tau)) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right\} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2)_a$$

$$\text{ここに } \eta(\tau) = \int_{t_n}^{\tau} r [1 + E_c \varphi(\tau)] d\tau$$

せん断応力 $\tau_{sxn}(t)$ についても、全く同様にしてせん断ひずみ $\delta_{sxn}(t)$ との間に関係式が成立する。

$$\tau_{sxn}(t) = \tau_{sxn}(t_n) + \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \left\{ \dot{\tau}_{sxn}(t_n) + \frac{E_c}{2(1+\nu)} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \ddot{\delta}_{sxn}(\tau) + r \dot{\delta}_{sxn}(\tau) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right\} d\tau \quad (2)_b$$

3. たわみ曲面の方程式

図-2のごとく、矩形スラブの中立面内で相隣る二辺に沿って直交軸 x および y を、またこれらに垂直下向きに z 軸をとり、鉄筋は x 、 y 軸に平行に配置されているものとする。

鉄筋はフリーブを起さないと仮定するゆえ、その x 、 y 方向の応力 $\sigma_{sxn}(t)$ 、 $\sigma_{sxn}(t)$ およびせん断応力 $\tau_{sxn}(t)$ がそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sxn}(t) &= E_s \epsilon_{sxn}(t), \quad \sigma_{sxn}(t) = E_s \epsilon_{sxn}(t) \\ \tau_{sxn}(t) &= \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \delta_{sxn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

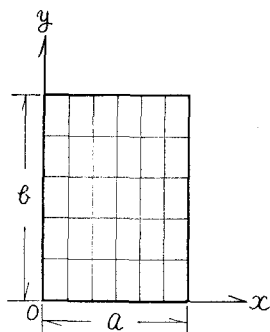


図-2

ここに $\epsilon_{sxn}(t)$ 、 $\epsilon_{sxn}(t)$ 、 $\delta_{sxn}(t)$: それぞれ鉄筋の x 、 y 方向ひずみおよびせん断ひずみ
 E_s 、 ν_s : 鉄筋のヤング係数およびポアソン比

いま、スラブの単位幅当りの曲げモーメントおよび捩りモーメントをそれぞれ $M_{xn}(t)$ 、 $M_{yn}(t)$ および $M_{xy}(t)$ 、 $M_{yx}(t)$ とおけば、平面保持の仮定のもとに、これらモーメントは式(2)、(3)およびスラブの z 方向のたわみ $w(t)$ を用いてそれぞれ次式のごとく表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_{xn}(t) &= M_{xn}(t_n) + \dot{M}_{xn}(t_n) \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} d\tau + M_{sxn}(t) - D_c \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + r \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} \right\} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau d\tau \\ M_{yn}(t) &= M_{yn}(t_n) + \dot{M}_{yn}(t_n) \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} d\tau + M_{sxn}(t) - D_c \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + r \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} \right\} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau d\tau \\ M_{xy}(t) &= M_{xy}(t_n) + \dot{M}_{xy}(t_n) \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} d\tau + M_{sxy}(t) + (1-\nu) D_c \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau d\tau \\ M_{yx}(t) &= M_{yx}(t_n) + \dot{M}_{yx}(t_n) \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} d\tau + M_{sxy}(t) - (1-\nu) D_c \int_{t_n}^t \bar{e}^{\eta(\tau)} \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{ここに } M_{xn}(t_n) = \int Q_{xn}(t_n) z dz, \quad M_{yn}(t_n) = \int Q_{yn}(t_n) z dz, \quad -M_{xy}(t_n) = M_{yx}(t_n) = \int \tau_{sxn}(t_n) z dz,$$

$$\dot{M}_{xn}(t_n) = \int \dot{Q}_{xn}(t_n) z dz, \quad \dot{M}_{yn}(t_n) = \int \dot{Q}_{yn}(t_n) z dz, \quad -\dot{M}_{xy}(t_n) = \dot{M}_{yx}(t_n) = \int \dot{\tau}_{sxn}(t_n) z dz,$$

$$M_{sxn}(t) = -D_{sx} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}, \quad M_{sxn}(t) = -D_{sy} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2}, \quad M_{sxy}(t) = \frac{D_{xy}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y}, \quad M_{sxy}(t) = -\frac{D_{xy}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y}.$$

ただし D_c : 中立軸に関するコンクリート断面の曲げ剛性

D_{sx} 、 D_{sy} : 中立軸に関する x 、 y 方向鉄筋断面の曲げ剛性。

スラブに作用する荷重強度を $q_m(x, y)$ とし、スラブの x 方向の力の釣合条件式、すなわち

$$\frac{\partial^2 M_{xx}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}(t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}(t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}(t)}{\partial x \partial y} = -q_m(x, y)$$

に式(4)を代入すれば、所要のクリープを考慮した RC スラブのたわみ曲面の方程式が次のごとく導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}(t_m)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}(t_m)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(t_m)}{\partial x \partial y} + \left\{ \frac{\partial^2 \dot{M}_{xx}(t_m)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{M}_{yy}(t_m)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}(t_m)}{\partial x \partial y} \right\} \int_{t_m}^t e^{\gamma(t-\tau)} d\tau \\ & - D_c \int_{t_m}^t e^{\gamma(t-\tau)} \int_{t_m}^{\tau} \nabla^4 \{ \dot{w}(\tau) + r \dot{w}(\tau) \} e^{\gamma(\tau)} d\tau d\tau = -q_m(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

また、 $w(t)$ の $t = t_m$ における初期条件が次の式(6)、(7)にて与えられる。

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w(t_m)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w(t_m)}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 w(t_m)}{\partial x^2 \partial y^2} = \bar{q}_m(x, y) \quad (6)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^4 \dot{w}(t_m)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 \dot{w}(t_m)}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 \dot{w}(t_m)}{\partial x^2 \partial y^2} = r E_c \varphi(t_m) \left[q_m(x, y) - \left\{ D_{xx} \frac{\partial^4 w(t_m)}{\partial x^4} + D_{yy} \frac{\partial^4 w(t_m)}{\partial y^4} + \frac{D_{xx} + D_{yy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 w(t_m)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \right] + \bar{q}_m(x, y) \quad (7)$$

$$\text{ここに、} \quad \beta_1 = D_c + D_{sx}, \quad \beta_2 = D_c + D_{sy}, \quad 2\beta_3 = 2D_c + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_m(x, y) &= q_m(x, y) + E_c \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left[-q_i(x, y) + D_{sx} \frac{\partial^4 w(t_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 w(t_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 w(t_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \left\{ C(t_m, t_{i+1}) - C(t_m, t_i) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ C(t_m, t_{i+1}) - C(t_m, \tau) \right\} \bar{e}^{\gamma(t)} \left\{ D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(t_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(t_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(t_i)}{\partial x^2 \partial y^2} - \int_{t_i}^{\tau} D_c \nabla^4 \{ \dot{w}(\tau) + r \dot{w}(\tau) \} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right\} d\tau \right] \\ \bar{q}_m(x, y) &= r E_c \bar{e}^{\gamma t_m} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left[-q_i(x, y) + D_{sx} \frac{\partial^4 w(t_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 w(t_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 w(t_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \left\{ \varphi(t_{i+1}) e^{r t_{i+1}} - \varphi(t_i) e^{r t_i} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \varphi(t_{i+1}) e^{r t_{i+1}} - \varphi(\tau) e^{r \tau} \right\} \bar{e}^{\gamma(t)} \left\{ D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(t_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(t_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(t_i)}{\partial x^2 \partial y^2} - \int_{t_i}^{\tau} D_c \nabla^4 \{ \dot{w}(\tau) + r \dot{w}(\tau) \} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right\} d\tau \right] \end{aligned}$$

4. 解法 基本方程式(5)の両辺を t で2回微分すれば、次の微分方程式が導かれる。

$$\beta_1 \frac{\partial^6 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^6 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^6 \dot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \{ r D_c + D_{sx} \dot{\gamma}(t) \} \frac{\partial^6 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + \{ r D_c + D_{sy} \dot{\gamma}(t) \} \frac{\partial^6 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + \left\{ 2 r D_c + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \dot{\gamma}(t) \right\} \frac{\partial^6 \dot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (8)$$

ここで取り扱うスラブは四辺が単純支持されるものとし、座標軸 x, y を図-2のごとく定めれば、境界条件が次式で与えられる。

$$x=0, a \text{ において } w(t) = M_x(t) = 0, \quad y=0, b \text{ において } w(t) = M_y(t) = 0 \quad (9)$$

いま、式(8)の微分方程式の解が、式(9)の境界条件を満足する次式でえられるものと仮定する。

$$\text{すなわち} \quad w(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{jke}(t) \sin \frac{j\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (10)$$

ただし $A_{jke}(t)$ は t のみの関数である。

式(10)を式(8)に代入すれば未知関数 $A_{jke}(t)$ に関する2階の微分方程式がえられ、これを解いて $A_{jke}(t)$ が容易に次式のごとく求められる。

$$A_{jke}(t) = A_{jke}(t_m) + \dot{A}_{jke}(t_m) \int_{t_m}^t e^{-\int_{t_m}^{\tau} \gamma(\tau) d\tau} d\tau \quad (11)$$

$$\text{ここに} \quad A_{jke}(t_m) = \frac{\bar{q}_{mjke}}{\pi^4 \left(\frac{j^4}{a^4} \beta_1 + \frac{k^4}{b^4} \beta_2 + 2 \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \beta_3 \right)}, \quad \dot{A}_{jke}(t_m) = \frac{r E_c \varphi(t_m) \left[\bar{q}_{mjke} - \pi^4 \left(\frac{j^4}{a^4} D_{sx} + \frac{k^4}{b^4} D_{sy} + \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \right) A_{jke}(t_m) \right] + \bar{q}_{mjke}}{\pi^4 \left(\frac{j^4}{a^4} \beta_1 + \frac{k^4}{b^4} \beta_2 + 2 \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \beta_3 \right)}$$

$$\bar{v}_{njk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b v_n(x, y) \sin \frac{j\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y dx dy, \quad \bar{v}_{njk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b v_n(x, y) \sin \frac{j\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y dx dy$$

$$\bar{v}_{njk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b v_n(x, y) \sin \frac{j\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y dx dy, \quad Q_{jk}(\tau) = r \left[1 + \frac{\frac{j^4}{a^2} D_{xx} + \frac{k^4}{b^2} D_{yy} + \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \frac{D_{xx} + D_{yy}}{1 + \nu_s}}{\frac{j^4}{a^2} \beta_1 + \frac{k^4}{b^2} \beta_2 + 2 \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \beta_3} E_c \varphi(\tau) \right]$$

式(11)を式(10)に代入すれば、任意時刻におけるスラブのたわみが求められ、さらに $w(t)$ を式(2)、(3)に代入してそれぞれコンクリートおよび鉄筋のクリープ応力が算定されることとなる。

5. 計算例

αおよびβ方向の鉄筋比がともに0.5%の四辺単純支持単鉄筋正方形スラブを考え、コンクリートおよび鉄筋の弾性定数を $E_c = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.15$, $E_s = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_s = 0.3$ とする。またコンクリートのクリープ関数として次式を用いる。⁽²⁾

$$\delta = 3.04 \times 10^{-2}, \quad \varphi(\tau) = 2.94 \times 10^{-4} / \tau + 5.08 \times 10^{-5}$$

コンクリートの材令 $t_0 = 28$ 日で満載等分布荷重 δ を載荷し、以後20日間隔で δ の除荷、載荷を繰り返す場合のスラブ中央点 ($x = a/2$, $y = b/2$) におけるたわみの時間的変化をプロットすれば、図-3のごとくである。

図-4は、同じく $t_0 = 28$ 日で満載等分布荷重 δ を載荷のうち、20日間隔で荷重を 2δ , 3δ と増加する場合の、スラブ中央点のたわみの時間的変化を示すものである。

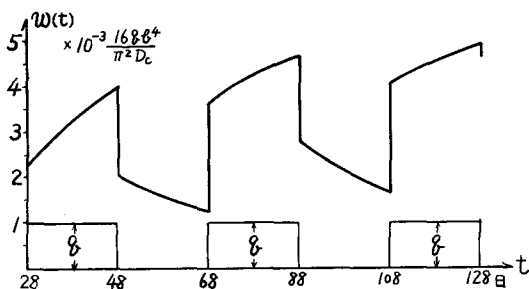


図-3

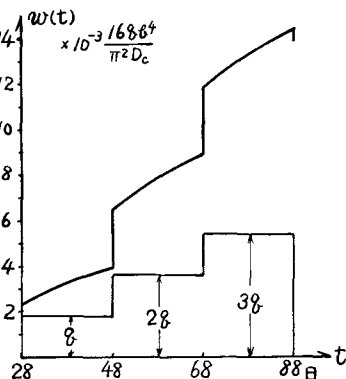


図-4

6. 結語

本論文は、従来の単軸クリープ理論を二次元クリープ問題に拡張して、任意の時間間隔で大きさが変化する持続荷重を受けるRCスラブの曲げフリープ解析に適用可能ならしめたもので、本法を用うれば算例に示すごとき繰返し荷重や階段状変動荷重などに対するRCスラブのクリープ挙動を厳密に追跡できるほか、除荷時の残留クリープひずみや残留応力、さらにその後のクリープ回復の模様などをも的確に把握しうることとなる。

【参考文献】

- (1) C. A. Miller and S. A. Guralnick: Reinforced Concrete Beams Subjected to Repeated Loads. Proc. of ASCE. October, 1967.
- (2) 山崎徳也・彦坂 照: クリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブの解法。第23回土木学会年次学術講演会講演概要。昭和43年10月。