

九州大学 工学部 正員 山崎 徳也
九州大学 工学部 正員 山田喜四夫
長崎大学 工学部 正員 橋 本 武

1. 緒言

先に、著者らは一対辺が単純支持され、他対辺が任意間隔に配置された柱で支持される矩形板¹⁾および扇形板²⁾について級数解を用いる厳密解法を發表した。すなわち、板の基礎微分方程式から基本連立方程式を誘導のうえ、これを解いて未知不静定力たる柱の反力および反力モーメントを算出すれば、本題の板構造は静定として解けることとなる。しかし、級数解ゆえ、たわみの3階微分、すなわち、せん断力や単純支持辺の反力を求めることは級数の収束性が極めて悪く困難である。また、一対辺が固定され他の辺が柱にて支持される場合や、全周辺が柱にて支持される場合などを含め周辺が他の支持条件で支持される矩形板や扇形板その他の任意形状板では基礎微分方程式の厳密解をうることが一般に困難である。以上のごとく解析困難な場合には、他の板構造と同様、本題の板構造についても差分法や有限要素法などの近似解法を用うことができるが一般に同様の問題についてこれらの方法をそのまま適用のうえプログラムで計算されているため、その都度大容量の電子計算機を必要とし、かかる意味より必ずしも実用的でないことも多い。そこで、本研究は周辺の一部または全周辺に柱が配置され、加えて任意境界条件をもつ矩形板の解法として、著者らが先の級数解で示した解法原理に近似解たる有限要素法とを組み合わせた実用解法を提示するとともにその力学的特性を明らかにせんとするものである。

2. 解法原理

板と柱が直交して剛接される場合は、板から柱に垂直反力、 x , y 方向の水平反力、曲げモーメントおよび捩りモーメントが伝えられるが、板面内の捩りモーメントおよび水平反力はそれぞれ微小であるからこれらを無視することとする(図-1参照)。しかるとき、級数解による著者らの研究^{1,2)}から、周辺が柱にて支持される矩形板の解法を次のごとく要約することができ(図-2参照)。

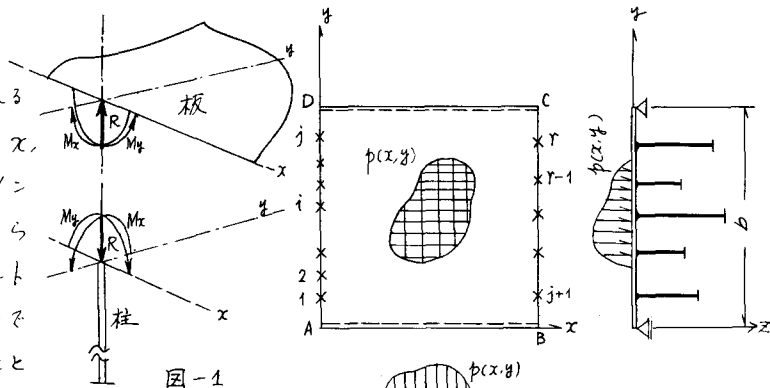


図-1

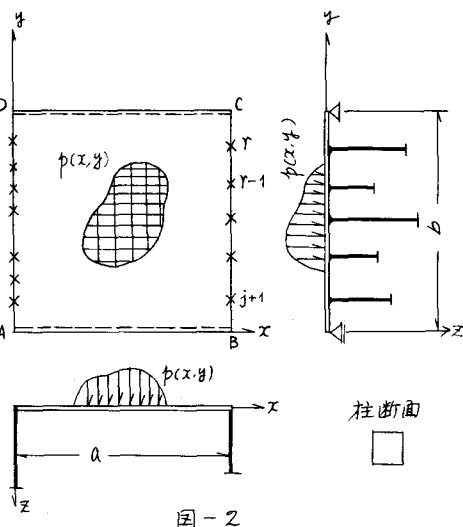


図-2

一般に、板が r 本の柱で支持されるものとし、また、板面に対して任意垂直荷重が作用するものとする。しかるとき、板面内に図-2のごとく直交座標系 (x, y, z) を導入すれば、板から i 番目の柱に伝えられる力およびモーメント、すなわち不静定反力 R_i, M_{xi}, M_{yi} を求めるための基本連立方程式は次のごとく与えられる。

$$\begin{bmatrix} A_{1k}^d & A_{2k}^d & \cdots & A_{rk}^d & B_{1k}^d & B_{2k}^d & \cdots & B_{rk}^d & C_{1k}^d & C_{2k}^d & \cdots & C_{rk}^d \\ A_{1k}^x & A_{2k}^x & \cdots & A_{rk}^x & B_{1k}^x & B_{2k}^x & \cdots & B_{rk}^x & C_{1k}^x & C_{2k}^x & \cdots & C_{rk}^x \\ A_{1k}^y & A_{2k}^y & \cdots & A_{rk}^y & B_{1k}^y & B_{2k}^y & \cdots & B_{rk}^y & C_{1k}^y & C_{2k}^y & \cdots & C_{rk}^y \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} L_k^d - d_k \\ L_k^x - \theta_{xk} \\ L_k^y - \theta_{yk} \end{bmatrix} \quad (1) \quad k=1, 2, \dots, r$$

こゝに $X = \{R_1, R_2, \dots, R_r, M_{x1}, M_{x2}, \dots, M_{xr}, M_{y1}, M_{y2}, \dots, M_{yr}\}^T$

R_i : 上向きを正とする。 M_{xi} : 点*i*側からみて右まわりを正とする。

M_{yi} : 点*i*側からみて左まわりを正とする。 d_i : 柱*i*の頸部の垂直変位で下向きを正とする。

θ_{xi} : 柱*i*の頸部の*x*方向の回転変位でその符号は M_{xi} と一致する。

θ_{yi} : 柱*i*の頸部の*y*方向の回転変位でその符号は M_{yi} と一致する。

式(1)右辺の付数行列における各要素は形状変数であり、また、右辺の第一項は荷重により定まる荷重項であるが、それらはそれそれのごとく定義される。すなわち、本題の板構造から柱を取り除いてえられる構造物を基本構と名付ければ、基本構が安定である場合に限って、各形状変数 $A_{ik}^d, A_{ik}^x, A_{ik}^y, B_{ik}^d, B_{ik}^x, B_{ik}^y, C_{ik}^d, C_{ik}^x, C_{ik}^y$ および荷重項 L_k^d, L_k^x, L_k^y はそれそれのごとき内容をもつものである(図-3参照)。

A_{ik}^d = 基本構の点*i*に単位荷重 $P=1$ が加わるとき、点*k*が下向きにおこす垂直変位 d_k である。

A_{ik}^x = 基本構の点*i*に単位荷重 $P=1$ が加わるとき、点*k*が点*i*側からみて右まわりにおこす*x*方向の回転変位 θ_{xk} である。

A_{ik}^y = 基本構の点*i*に単位荷重 $P=1$ が加わるとき、点*k*が点*i*側からみて左まわりにおこす*y*方向の回転変位 θ_{yk} である。

B_{ik}^d = 基本構の点*i*に単位*x*方向モーメント $M_{xi}=1$ が加わるとき、点*k*が下向きにおこす垂直変位 d_k である。

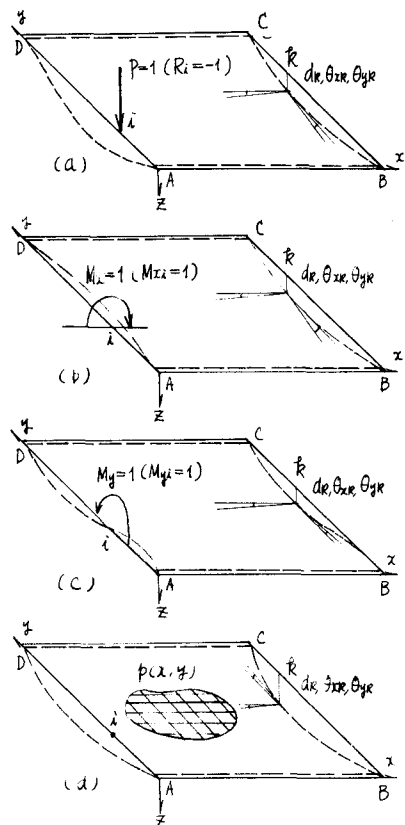
B_{ik}^x = 基本構の点*i*に単位*x*方向モーメント $M_{xi}=1$ が加わるとき、点*k*が点*i*側からみて右まわりにおこす*x*方向の回転変位 θ_{xk} である。

B_{ik}^y = 基本構の点*i*に単位*x*方向モーメント $M_{xi}=1$ が加わるとき、点*k*が点*i*側からみて左まわりにおこす*y*方向の回転変位 θ_{yk} である。

C_{ik}^d = 基本構の点*i*に単位*y*方向モーメント $M_{yi}=1$ が加わるとき、点*k*が下向きにおこす垂直変位 d_k である。

C_{ik}^x = 基本構の点*i*に単位*y*方向モーメント $M_{yi}=1$ が加わるとき、点*k*が点*i*側からみて右まわりにおこす*x*方向の回転変位 θ_{xk} である。

C_{ik}^y = 基本構の点*i*に単位*y*方向モーメント $M_{yi}=1$ が加わるとき、点*k*が点*i*側からみて左まわりにおこす*y*方向の回転変位 θ_{yk} である。



* 例えは一対辺垂直支持、他対辺自由なる矩形板を基本構にとるものとする。

図-3

L_R^1 = 求めんとする L_R^2 の荷重状態と同じ荷重が基本構に伝らくとき、基本構の点束が下向きにおこす垂直変位 d_R である。

L_R^2 = 求めんとする L_R^3 の荷重状態と同じ荷重が基本構に伝らくとき、基本構の点束が支点側からみて右向きにおこす x 方向の回転変位 θ_R である。

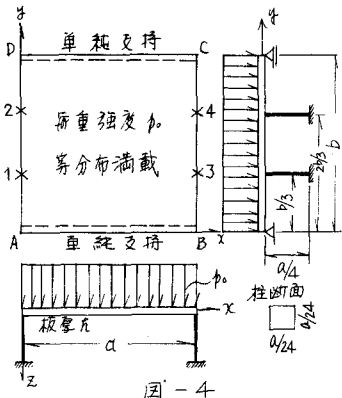
L_R^3 = 求めんとする L_R^4 の荷重状態と同じ荷重が基本構に伝らくとき、基本構の点束が支点側からみて左向きにおこす y 方向の回転変位 θ_R である。

以上から明らかなように、形状変数および荷重値のいずれも基本構のたわみまたは、たわみ角によって定義されることとなる。したがって、種々の境界条件を有する基本構について、単位荷重、単位モーメントおよび任意垂直荷重が作用する場合の断面諸量があらかじめ算出されておけば、さらに加えて柱で支持される本題の板構造を解くことが可能となる。すなわち、式(1)の各式を柱のすべての位置で求め、えられた諸式を連立に解けば、未知不静定力たる柱壁反力および反力モーメントが算出される。しかるとき、本題の板構造は任意垂直荷重とともに柱の反力および反力モーメントをも荷重として受ける基本構の問題に帰することとなり、重ね合せの原理から断面諸量が簡単に決定されることとなる。さて、肝要の基本構の断面諸量であるが周知のごとく一対皿が単純支持を含め数種の境界条件の矩形板に限り厳密解による厳密解をうる事ができるが、一般的には厳密解を求めることが困難な場合の方が多い。かかる場合の近似解法としては半変函数を用う方法や差分法、有限要素法などがあるが、その中で有限要素法が最も簡便であり、また、応用範囲が広いことを考慮し本研究ではこれを用いて上記基本構の断面諸量の算出を行い、本題の構造を含めうる体系的な一般解法を可能ならしめたものである。

3. 適用例

(1) 有限要素法の精度

著者らが文献(1)で示したものと同一例題(図-4参照)をとりば級数解と有限要素法とを用いた近似解法による結果とを比較し、有限要素法の精度を数値的に吟味すれば表-1へ表-4のごとくである。すなわち、表-1および表-2は基本連立方程式における形状変数および荷重値を比較したもので、 3×3 分割の場合ではかなり誤差が大きいが、 6×6 分割ではほぼ5%程度に止まる。表-3は基本連立方程式の解たる不静定力を比較したもので、有限要素法の誤差はたかだか8%以下である。表-4は板中点のたわみを示したもので有限要素法が実用的に十分有意味であることが認められる。



	$A_{11}^d, A_{22}^d, A_{33}^d, A_{44}^d$	$A_{21}^d, A_{12}^d, A_{32}^d, A_{23}^d$	$A_{31}^d, A_{13}^d, A_{42}^d, A_{24}^d$	$A_{41}^d, A_{14}^d, A_{34}^d, A_{43}^d$
FEM 3×3	0.046140 (5.6)	0.035992 (2.3)	0.005760 (5.8)	0.005649 (6.2)
exact	0.048113 (1.6)	0.036678 (0.5)	0.005895 (3.6)	0.005831 (3.2)
	0.048888	0.036855	0.006114	0.006023
	$B_{11}^d, B_{22}^d, B_{33}^d, B_{44}^d$	$B_{21}^d, B_{12}^d, B_{32}^d, B_{23}^d$	$B_{31}^d, B_{13}^d, B_{42}^d, B_{24}^d$	$B_{41}^d, B_{14}^d, B_{34}^d, B_{43}^d$
FEM 3×3	0.112568 (7.5)	0.062036 (0.1)	0.006954 (4.9)	0.008103 (4.2)
exact	0.113472 (6.8)	0.062089 (0.1)	0.007104 (5.4)	0.007568 (2.7)
	0.121668	0.062090	0.007445	0.007779
	$C_{11}^d, C_{22}^d, C_{33}^d, C_{44}^d$	$-C_{21}^d, -C_{12}^d, -C_{32}^d, -C_{23}^d$	$C_{31}^d, C_{13}^d, C_{42}^d, C_{24}^d$	$C_{41}^d, C_{14}^d, C_{34}^d, C_{43}^d$
FEM 3×3	0.059205 (1.8)	0.086347 (4.0)	0.009833 (12.0)	0.009533 (12.0)
exact	0.060021 (0.4)	0.089257 (0.7)	0.010528 (5.8)	0.010765 (0.8)
	0.060264	0.089922	0.111733	0.101045

例えは $A_{12}^d, A_{13}^d, A_{14}^d$ を示す

表-1 形状変数

	$L_1^d, L_2^d, L_3^d, L_4^d$	$-L_1^d, -L_2^d, L_3^d, L_4^d$	$L_1^d, L_2^d, -L_3^d, -L_4^d$
FEM 3×3	0.012449 (4.5)	0.011528 (4.3)	0.021384 (7.8)
FEM 6×6	0.012544 (3.7)	0.011854 (1.4)	0.022543 (2.3)
exact	0.013011	0.012027	0.023060

表-2 荷重係

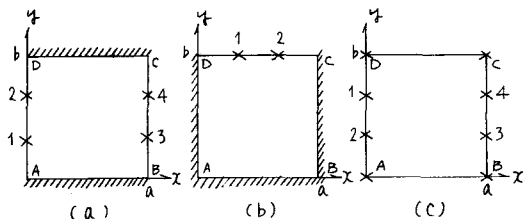
	$R_1, R_2, R_3, R_4 \times 10^2 p_0$	$-M_{11}, -M_{22}, M_{33}, M_{44} \times 10^3 p_0$	$M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{44} \times 10^3 p_0$
FEM 3×3	0.14307 (6.0)	0.010030 (7.9)	0.000270 (7.6)
FEM 6×6	0.14923 (2.0)	0.010563 (3.1)	0.000266 (7.2)
exact	0.15221	0.010901	0.000287

表-3 不静定力の値

(2) 級数解で解けない矩形板の例

2. の解法原理を図-5. (a), (b), (c) に示す3例にフリで適用し, それぞれの解析結果を示せば

表-5 のごとく求められる。



二辺固定 三辺固定 四隅固定

* 柱位置は柱支持される辺の $1/3, 2/3$ にあるものとする
 * 荷重は全面均分布荷重とする (荷重係 p_0)
 * $\nu=0.3$

図-5

4. 結語

本法は基本構にフリの断面諸重のみがデータとして用いられる。したがって, 各種基本構にフリの断面諸重をあらかじめ計算のうえ図表化しておけば, 本題の構造問題はその断面電子計算機を使用することなく, 簡単な手計算によって解くことができ極めて実用的である。しかしながら, 種々の形式をもつ基本構にフリのさまざまな寸法や荷重状態に対する断面諸重を求めることは非常に大きな計算量となることは明らかである。今日, 近似解法としての有限要素法と電子計算機の発達, 普及にともない極めて多種類の形状および荷重状態を有する板構造が広く解析されるようになったが, これらの結果を統一集大成すれば本法による本題のごとき各種構造問題の体系的解析が極めて容易となりその実際応用が期待されるものである。

参考文献 (1) 山崎, 樗木, 山田: 一対辺が中間支柱にて剛接される等方性矩形板の解法

昭和42年度, 土木学会西部支部, 研究発表会論文集 (昭和43年2月)

(2) 山崎, 樗木, 山田: 円周に沿う二辺が柱にて支持される扇形平板の解法

第23回 土木学会, 年次学術講演会講演概要 (昭和43年10月)

FEM 3×3	0.56095 (4.0)
FEM 6×6	0.57146 (2.2)
exact	0.58432

表-4 板中央点のたわみ $\times 10^{-3} p_0 a^4 / D$

* たわみ $\mu = b/a = 1.0, \nu$ (ポアソン比) = 0.3

* FEM は有限要素法の畧 * D: 板剛度

* 表中, () 内の数値は数値解との誤差, %

	μ	0.5	1.0	1.5	2.0
(a)	3×3	0.023712	0.082672	0.175477	0.276759
	6×6	0.020036	0.077162	0.167576	0.267163
(b)	3×3	0.060178	0.082425	0.095062	0.120589
	6×6	0.059324	0.076706	0.092573	0.118432
(c)	3×3	0.057445	0.139055	0.225975	0.384656
	6×6	0.054528	0.134805	0.205089	0.368936

たわみ $\mu = b/a$, また, 柱の曲げ剛性は無視する。

表-5 垂直反力の値 (R_i) $\times p_0 a^2$