

1.序 多数の孔が羅列された板および梁の二次元弾性問題は工学の諸分野で多見せられ、その理論的研究は重要であるにもかかわらず著者らの知る限りでは余り見受けられないようである。本論はキャストレーテッド・ビームを初めとする有孔梁に関する著者らの研究の一環として、一列に並ぶ三円孔を含む無限板を取上げ、一様な引張力、せん断力および曲げモーメントが作用する場合について Schwarzの Alternating Method¹⁾ により応力式を誘導し、算例として二方向引張のもとに孔中心線上の応力を求めたものである。なお、ここでは Alternating Method の第二近似を用いるゆえ、上記算例についてその誤差の検討をも併せ行うこととする。

2.応力函数および応力式の誘導

(i) 基本式：図-1に示すごとく、三円孔の中心をそれぞれ O_1, O, O_2 とし、これらを原点として直角座標 $(x_1, y_1), (x, y), (x_2, y_2)$ および極座標 $(r_1, \theta_1), (r, \theta), (r_2, \theta_2)$ を定義すれば、両座標間の関係はそれぞれ次式で表わされる。 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z = x + iy = r e^{i\theta}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ (1)

また、各孔半径、孔間距離および荷重状態は図-1に示すごとくであり、三円孔は一列に並ぶものとする。このとき応力函数として次式を仮定するか、本法では孔の位置関係より Z -平面および z_1 -平面上の応力函数を決定すれば十分である。ここで Z -平面上の応力函数とは板全体を Z -平面とみなした場合の応力函数で、 z_1 -平面上のそれについても同様である。

$$Z\text{-平面上の応力函数: } \Phi(Z) = \Phi_0(Z) + \Phi_1(Z) + \Phi_2(Z), \quad \Psi(Z) = \Psi_0(Z) + \Psi_1(Z) + \Psi_2(Z) \quad (2)$$

ここに第一項は Z -平面上に0孔が単独に存在する場合の応力函数で、第二項および第三項はそれぞれ O_1 孔および O_2 孔が追加されるために Z -平面上の応力函数に付加されるものである。

$$z_1\text{-平面上の応力函数: } \Phi(z_1) = \Phi_1(z_1) + \Phi_0(z_1), \quad \Psi(z_1) = \Psi_1(z_1) + \Psi_0(z_1) \quad (3)$$

ここに第一項および第二項はそれぞれ z_1 -平面上に O_1 孔が単独に存在する場合の応力函数および0孔による付加応力函数である。なお、この場合 O_2 孔は O_1 孔より十分速く離れているものとし、これによる付加応力函数は無視できるものとする。

応力函数が式(2), (3)で与えられるとき、これを Alternating Method の第二近似といい、式(2), (3)の第一項のみ採るときを第一近似という。

式(2), (3)で与えられる応力函数とこれによってえられる応力との関係は、Koloso-v-Muskhelishvili の公式より次式のごとくである。

$$Z\text{-平面上において} \quad \sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}[\Phi(Z)], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{Z}\Phi'(Z) + \Psi(Z)] \quad (4a)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re}[\Phi(Z)], \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{Z}\Phi'(Z) + \Psi(Z)]e^{2i\theta} \quad (4b)$$

$$z_1\text{-平面上において} \quad \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = 4\operatorname{Re}[\Phi(z_1)], \quad \sigma_{y_1} - \sigma_{x_1} + 2i\tau_{x_1 y_1} = 2[\bar{z}_1\Phi'(z_1) + \Psi(z_1)] \quad (5a)$$

$$\sigma_{r_1} + \sigma_{\theta_1} = 4\operatorname{Re}[\Phi(z_1)], \quad \sigma_{\theta_1} - \sigma_{r_1} + 2i\tau_{r_1 \theta_1} = 2[\bar{z}_1\Phi'(z_1) + \Psi(z_1)]e^{2i\theta_1} \quad (5b)$$

ここに R および プライム 符号はそれぞれ [] 内の函数の実数部分および () 内の変数による微分を意味する。

一般に任意の応力函数 $\varphi(z), \psi(z)$ による応力場に在る境界上の合応力は次式で与えられる。

$$f(z) = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} \quad (6)$$

函数 f によって定義される境界が応力自由の孔であれば、次式により示される函数がこの合応力を打ち消すべく境界に沿って同時に存在しなければならない。

$$\text{すなわち} \quad f_1(z) = -f(z) = -\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)} \quad (7)$$

式(7)の境界条件に対応する応力函数は次式で与えられる。

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1(t)}{t-z} dt, \quad \psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{f_1(t)}}{t} dt - \frac{r^2}{z} \varphi_1'(z) \quad (8)$$

ここに $t = R e^{i\theta}$ (R : 孔半径)

したがって最終応力状態に対応する応力函数は次式で与えられることになる。

$$\varphi(z) = \varphi^0(z) + \varphi^1(z), \quad \psi(z) = \psi^0(z) + \psi^1(z) \quad (9)$$

(ii) $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ の算定: $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ は図-1において z -平面上に0孔が単独に存在する場合の応力函数であり、これらの算定の際0孔および0孔を考慮しないのは勿論である。 $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ を式(9)より次式のごとく表示する。

$$\Phi_0(z) = \Phi_0^0(z) + \Phi_0^1(z), \quad \Psi_0(z) = \Psi_0^0(z) + \Psi_0^1(z) \quad (10)$$

式(10)において右辺の第一、第二項はそれぞれ式(9)の第一、第二項に相当するもので、前者は z -平面上に0孔が無い場合の図-1に示すとき応力場における応力函数、後者は0孔を設けるために新たに付加されるものである。したがって $\Phi_0(z)$ および $\Psi_0(z)$ は $\Phi_0^0(z), \Phi_0^1(z)$ および $\Psi_0^0(z), \Psi_0^1(z)$ を計算することにより式(10)より直ちに決定される。

図-1の z -平面上に0孔が無い場合の応力は次式で表わされる。

$$\sigma_x^* = p + \frac{M}{I} y = p \left(1 + \frac{d\alpha^0}{I} y\right), \quad \sigma_y^* = \delta p, \quad \tau_{xy}^* = \lambda p \quad (11)$$

また、応力 σ_x^*, σ_y^* および τ_{xy}^* と応力函数 $\Phi_0^0(z), \Psi_0^0(z)$ との関係は式(4a)より次式で与えられる。

$$\sigma_x^* + \sigma_y^* = 4 \operatorname{Re}[\Phi_0^0(z)], \quad \sigma_y^* - \sigma_x^* + 2i \tau_{xy}^* = 2[\overline{z} \Phi_0^0(z) + \Psi_0^0(z)] \quad (12)$$

$\Phi_0^0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \quad \Psi_0^0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$ と表わされるゆえ、式(11)を式(12)に代入して未定係数 A_n, B_n を決定すれば、 $\Phi_0^0(z)$ および $\Psi_0^0(z)$ は次式のごとくなる。

$$\Phi_0^0(z) = \frac{1}{4} (1 + \delta) p z - i \frac{M}{8I} z^2, \quad \Psi_0^0(z) = \left\{ \frac{1}{2} (\delta - 1) + i \lambda \right\} p z + i \frac{M}{8I} z^2 \quad (13)$$

次にこの場合の境界条件は式(7)より次式のごとく表わされる。

$$f(z) = -\Phi_0^0(z) - z \overline{\Phi_0^0(z)} - \overline{\Psi_0^0(z)} \quad (14)$$

式(14)に対応する応力函数 $\Phi_0^1(z), \Psi_0^1(z)$ は式(8)より次式で与えられる。

$$\Phi_0^1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_0^1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{f_1(t)}}{t} dt - \frac{r^2}{z} \Phi_0^1(z) \quad (15)$$

ここに $t = a e^{i\theta}$

式(15)に式(13), (14)を適用することにより $\Phi_0^1(z)$ および $\Psi_0^1(z)$ が次式のごとく求められる。

$$\Phi_0^1(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2}, \quad \Psi_0^1(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \frac{b_4}{z^4} \quad (16)$$

ここに $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ は式(18)参照

したがって所要の応力函数 $\Phi_0(z)$ および $\Psi_0(z)$ が式(13), (16)を用いて式(10)より次のごとくえられる。

$$\Phi_0(z) = A_0 z^2 + A_1 z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2}, \quad \Psi_0(z) = B_0 z^2 + B_1 z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \frac{b_4}{z^4} \quad (17)$$

ここに、係数 $A_1, A_2, a_1, a_2, B_1, B_2, b_1, \dots, b_4$ は次式で与えられるものである。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= P A_1', A_2 = i \frac{P}{\alpha} A_2', a_1 = P \alpha^2 (a_1' + i a_2'), a_2 = P \alpha^2 i a_2', B_1 = P (B_1' + i B_2'), B_2 = \frac{P}{\alpha} i B_2' \\ b_1 &= P a b_1', b_2 = P a^2 i b_2', b_3 = P a^2 (b_3' + i b_4'), b_4 = P a^2 i b_4' r^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし $A_1' = \frac{1}{4}(\delta + 1), A_2' = -\frac{1}{8}\delta\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}}, a_1' = -\frac{1}{2}(\delta - 1), a_2' = \lambda, a_2' = \frac{1}{8}\delta\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}}$
 $B_1' = \frac{1}{2}(\delta - 1), B_2' = \lambda, B_3' = \frac{1}{8}\delta\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}}, b_1' = \frac{1}{4}\delta\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}}, b_2' = -\frac{1}{2}(\delta + 1)$
 $b_2' = -\frac{1}{2}(\delta + 1), b_3' = -\frac{1}{2}(\delta - 1), b_4' = \lambda, b_4' = \frac{1}{4}\delta\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}}$

かくして応力函数が決定されれば、この場合すなわち Z -平面上に O 孔のみが存在するときの応力は式(17)を式(4b)に代入することにより求られ、特に $\theta = 0$ 上では次のとくえられることとなる。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_0/P &= (2A_1' - B_1') + (-4a_1' + b_1' + 3b_3')\left(\frac{r}{r_0}\right)^2, (\sigma_\theta)_0/P = (2A_1' + B_1') - (b_1' + 3b_3')\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \\ (\tau_{\theta r})_0/P &= B_1' + 2(A_2' + B_2')\left(\frac{r}{r_0}\right) + (2a_1' - 3b_3')\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 2(3a_2' - b_2' - 2b_4')\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(iii) $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ および $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ の算定: $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ は Z -平面上の O 孔に O 孔が追加されるために付け加えられる応力函数であるが、この算定には O 孔のみによる応力函数 $\Phi(z), \Psi(z)$ が必要で、これらは $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ を用いて次式のとく表示される。

$$\Phi(z) = \Phi_0(z)_{z \rightarrow z_1, a \rightarrow a_1}, \Psi(z) = \Psi_0(z)_{z \rightarrow z_1, a \rightarrow a_1} \quad (20)$$

ここに、 $\Phi_0(z)_{z \rightarrow z_1, a \rightarrow a_1}$ は $\Phi_0(z)$ において z を z_1 に、 a を a_1 にそれぞれ変換してえられる函数を示し、 $\Psi_0(z)_{z \rightarrow z_1, a \rightarrow a_1}$ も同様であり以下かかる表示法を用うることとする。

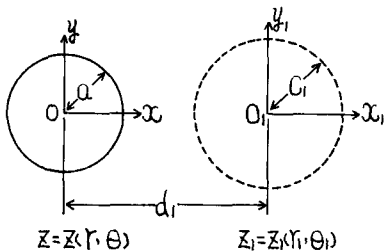


図-2

図-2において荷重状態は図-1と同一で、 Z -平面上に O 孔のみが存在しているものとするれば、 Z -平面における応力式は式(17)を用いて次式にて与えられる。

$$\Phi - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0'(z)] \quad (21)$$

Z -平面における応力式は式(21)において $z = z_1 + d_1$ なる座標変換を用うればよく、次式のとくになる。

$$\begin{aligned} \Phi_1 - \sigma_{x_1} + 2i\tau_{x_1 y_1} &= 2[(\bar{z}_1 + d_1)\Phi_0'(z_1 + d_1) + \Psi_0'(z_1 + d_1)] \\ &= 2[\bar{z}_1\Phi_0'(z_1 + d_1) + d_1\Phi_0''(z_1 + d_1) + \Psi_0'(z_1 + d_1)] \end{aligned} \quad (22)$$

したがって、図-2における Z -平面上の応力函数 $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ が次式のとくえられる。

$$\Phi^0(z) = \Phi_0(z)_{z \rightarrow z + d_1}, \Psi^0(z) = d_1\Phi_0'(z)_{z \rightarrow z + d_1} + \Psi_0(z)_{z \rightarrow z + d_1} \quad (23)$$

次に O 孔を追加すれば、境界条件式は式(7)より次式となる。

$$f(z) = -\varphi^0(z) - \overline{z_1\varphi^0(z_1)} - \overline{\psi^0(z_1)} \quad (24)$$

式(24)に対応する応力函数 $\varphi'(z), \psi'(z)$ は式(8)より次式で与えられる。

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt, \psi'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t} dt - \frac{r_1^2}{z_1} \varphi'(z_1) \quad \text{ここに } t_1 = G e^{i\theta} \quad (25)$$

したがって Z -平面上に O 孔、 O_1 孔ともに存在する場合の応力函数は $\varphi'(z) + \varphi^0(z), \psi'(z) + \psi^0(z)$ となる。これら式(3)の $\Phi(z), \Psi(z)$ にそれぞれ等しく、また $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ も式(20)より既知であるゆえ、結局 $\Phi(z), \Psi(z)$ は次式となる。 $\Phi(z) = \varphi^0(z) + \varphi'(z) - \Phi_1(z), \Psi(z) = \psi^0(z) + \psi'(z) - \Psi_1(z)$ (26)

(iv) $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ および $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ の算定: これらは式(26)より次式のとく求られる。

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z)_{z_1 \rightarrow z, r_1 \rightarrow r, a \rightarrow a_1, G \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1}, \Psi_1(z) = \Psi_0(z)_{z_1 \rightarrow z, r_1 \rightarrow r, a \rightarrow a_1, G \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1} \quad (27)$$

$$\Phi_0(z) = \Phi_0(z)_{z_1 \rightarrow z, r_1 \rightarrow r, a \rightarrow a_1, G \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1}, \Psi_0(z) = \Psi_0(z)_{z_1 \rightarrow z, r_1 \rightarrow r, a \rightarrow a_1, G \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1} \quad (28)$$

(7)応力式の誘導：まずZ-平面上の応力を算定すれば、式(3)を式(5b)に代入して式(20),(26)を考慮することにより $\theta_1 = \pi$ 上で次値をうる。

$$\begin{aligned} \sigma_r/P &= 2A(r_1) - B(r_1), \quad \sigma_{\theta_1}/P = 2A(r_1) + B(r_1), \quad \tau_{r\theta_1}/P = C(r_1) \\ \text{ここに } A(r_1) &= -\alpha^2 \alpha_1' \frac{1}{r_1^2} + A_1' + \dots + (-3)r_1^2 \alpha_2^2 b_3 \frac{(d-r_1)^2}{(r_1^2-d^2)^2} + \dots, \quad B(r_1) = (-2)C^2 B_1' \frac{1}{r_1^2} + \dots + \frac{3}{(r_1-d)^2} \alpha_2^2 b_3^2 \\ C(r_1) &= (-2)r_1 \frac{1}{\alpha} A_2' + \dots + 6C^4 d_1 \alpha^2 a_2^2 \end{aligned} \quad (29)$$

次にZ-平面上の応力はZ₁-平面上におけると同様に、式(2)を式(4b)に代入して式(17),(27)および(28)を考慮することにより $\theta = 0$ 上で次値となる。

$$\begin{aligned} \sigma_r/P &= \{2A(r_1) - B(r_1)\} r_1 \rightarrow r, a \rightarrow a, c \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1 + \{2A(r_1) - B(r_1)\} r_1 \rightarrow r, a \rightarrow c_1, c \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1 - F_1(r) \\ \sigma_{\theta}/P &= \{2A(r_1) + B(r_1)\} r_1 \rightarrow r, a \rightarrow c, c \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1 + \{2A(r_1) + B(r_1)\} r_1 \rightarrow r, a \rightarrow c_1, c \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1 - F_2(r) \\ \tau_{r\theta}/P &= C(r_1) r_1 \rightarrow r, a \rightarrow c, c \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1 + C(r_1) r_1 \rightarrow r, a \rightarrow c_1, c \rightarrow a, d_1 \rightarrow d_1 - F_3(r) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{ここに } F_1(r) = (\sigma_r)_0/P, \quad F_2(r) = (\sigma_{\theta})_0/P, \quad F_3(r) = (\tau_{r\theta})_0/P$$

かくしてすべての平面上における応力式がえられ、孔中心線上の応力はこれらいずれを用いてもよいわけであるが、Z-平面上の応力式(30)は r が 0 孔に近づくに従い、またZ₁平面上のそれ(29)式は r_1 が 0 孔に近づくに従いそれぞれ誤差が大きくなることは論を俟たない。そこでこれらの数値的検討を以下に述べることにする。

3.算例 図-1において $G = G_1 = 2a$, $d_1 = d_2 = 7a$ として(図-3参照)ニ方向引張($d=1$, $d=\lambda=0$)の場合のZ-平面およびZ₁-平面における応力(三円孔は、 0 孔に関して対称であるゆえ、これらの二平面における応力でよい)を示せば、表-1のようになる。孔縁を意味する $r/a = 5.0$ および $r_1/G = 3.0$ における法線方向

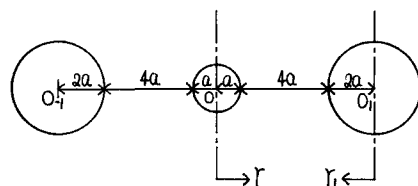


図-3

応力を見れば $\sigma_r/P = -0.06$, $\sigma_{\theta}/P = -0.11$ で応力自由の条件を満足してなく、本法では孔を遠去かるに従い誤差が増大することがわかる。したがって破線で囲まれた値が比較的正しい応力であると認められるが、孔間中心($r/a = 3.0$, $r_1/G = 2.0$)においては応力勾配小なるを以て $\sigma_r/P = 0.62$, $\sigma_{\theta}/P = 1.46$ も採用した。

r/a	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	
σ_r/P	0.00	0.58	0.62	0.47	-0.06	
σ_{θ}/P	2.64	1.58	1.46	1.57	2.09	
	-0.11	0.59	0.65	0.51	0.00	σ_r/P
	2.12	1.42	1.38	1.55	2.16	σ_{θ}/P
	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	r_1/G

表-1

4.結語 本論は多数の孔をもつ板や梁の二次元問題

に関する解法の第一歩として、三円孔を含む無限板の新解法を提示するもので、Alternating Methodの第二近似を用うるため多少の誤差を生ずるが、これらは工学的には無視しうるゆえ、本法は本題以外の二次元問題に対しても有力な方法と思われる。三円孔の孔間距離が比較的大なる場合を用いたが、小なる場合には本法では精度上の限界があり、Alternating Methodのより高次のものを用うる方法を考慮せねばならない。これについては、Alternating Methodによる有孔帯板の解法とともに後日発表の予定である。なお、数値計算はすべて本学大型電子計算機FACOM 230-60によった。

参考文献

- 1) I.S.Skolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, New 2nd Edn, 1956, pp. 318-326