I-44　　帯板を要素とする平板の解法について

室蘭工業大学　　正員　能町 純雄　松岡 健一
学生員　°堀米 昇士朗

1. まえがき

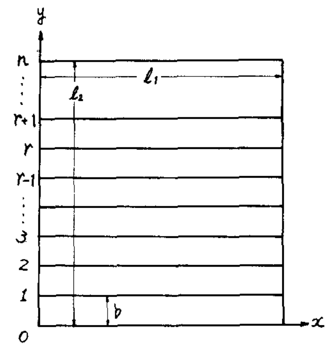
平板の応力解法としては、基本微分方程式の解を無限級数とし、解析する方法、階差方程式として解く方法、最近では有限要素法を用いる解法等、行われているが 本解法は平板を一方向に帯板要素に分割し、帯板要素方向は基本微分方程式を解き 他の方向は 各帯板要素の力のつり合から解を求めるものである。

2. 帯板要素の解式

平板の基本微分方程式は　$\Delta^2 w = \frac{q}{D}$　(1)

$b \ll l$ とすれば　$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}_m e^{-imx}\,dm$ を(1)式へ代入すると

$$m^4 \overline{W}_m - 2m^2\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2} + \frac{d^4\overline{W}_m}{dy^4} = \frac{Q_m}{D}$$ となる。



今、$0<y<b$ の範囲に荷重がないとすれば $\frac{Q_m}{D}=0$ となるので
各項に $\sin\frac{n\pi}{b}y$ をかけて部分積分し、$\int_0^b \overline{W}_m \sin\frac{n\pi}{b}y\,dy = S_n[\overline{W}_m]$ と
置くと 上式は

$$S_n[\overline{W}_m] = \left[\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+m^2\right\}^2}\left\{(-1)^n\left(\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2}\right)_b - \left(\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2}\right)_0\right\} - \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+m^2}\left\{(-1)^n\overline{W}_{mb} - \overline{W}_{m0}\right\}\right]$$

これを逆変換すると　$\overline{W}_m = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} S_n[\overline{W}_m]\sin\frac{n\pi}{b}y$　(2)

ここで　$\eta = \frac{y}{b}$ とすれば $P_m(\eta) = \frac{y\sinh m(2b-y) - (2b-y)\sinh my}{2mb^2(\cosh 2bm - 1)}$,　$\frac{2}{b}\sum\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+m^2\right\}^2}\sin\frac{n\pi}{b}y = b^2P_m(\eta)$

$$\frac{2}{b}\sum\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)(-1)^n}{\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+m^2\right\}^2}\sin\frac{n\pi}{b}y = -b^2P_m(1-\eta),\quad \frac{2}{b}\sum\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)(-1)^n}{\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+m^2\right\}}\sin\frac{n\pi}{b}y = -\frac{\sinh my}{\sinh mb} = -Q_m^*(1-\eta)$$

$$\frac{2}{b}\sum\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+m^2\right\}}\sin\frac{n\pi}{b}y = \frac{\sinh m(b-y)}{\sinh mb} = Q_m^*(\eta)$$　となる。

$P_m(\eta)$, $Q_m(\eta)$ を ベルヌーイの多項式に展開して 微小項を無視すると(2)式は

$$\overline{W}_m = \overline{W}_{m0}\times f^{(1)}(\eta) + \overline{W}_{mb}\times f^{(1)}(1-\eta) - \left(\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2}\right)_0\times b^2f^{(3)}(\eta) - \left(\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2}\right)_b\times b^2f^{(3)}(1-\eta) \qquad (3)$$

ここで
$$\left.\begin{aligned} f^{(1)}(\eta) &= 1-\eta & f^{(3)}(\eta) &= \frac{1}{6}\eta(1-\eta)(2-\eta)\\ f^{(1)}(1-\eta) &= \eta & f^{(3)}(1-\eta) &= \frac{1}{6}\eta(1-\eta^2)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

簡単の為に　$\frac{d^2w}{dy^2} = -\frac{M^*}{D}$ と置くと　(3)式から

$$w = w_0 f^{(1)}(\eta) + w_b f^{(1)}(1-\eta) + \frac{M_0^* b^2}{D}f^{(3)}(\eta) + \frac{M_b^* b^2}{D}f^{(3)}(1-\eta) \qquad (5)$$

又、
$$\Delta w = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left\{\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2} - m^2\overline{W}_m\right\}_0\left\{f^{(1)}(\eta) - b^2m^2f^{(3)}(\eta)\right\} + \left\{\frac{d^2\overline{W}_m}{dy^2} - m^2\overline{W}_m\right\}_b\left\{f^{(1)}(1-\eta) - b^2m^2f^{(3)}(1-\eta)\right\}\right]\times e^{-imx}\,dm$$

従って
$$\Delta w = \left\{-\frac{M_0^*}{D} + \ddot{w}_0\right\}f^{(1)}(\eta) + \left\{-\frac{M_b^*}{D} + \ddot{w}_b\right\}f^{(1)}(1-\eta) + \left\{-\frac{\ddot{M}_0^* b^2}{D} + \ddddot{w}_0 b^2\right\}f^{(3)}(\eta) + \left\{-\frac{\ddot{M}_b^* b^2}{D} + \ddddot{w}_b b^2\right\}f^{(3)}(1-\eta) \qquad (6)$$

(4), (5)式から スロープ θ を 求めると

$$\theta_{0b} = (w_b - w_0/b) + \frac{2M_0^* b}{6D} + \frac{M_b^* b}{6D},\ (\eta=0),\qquad \theta_{b0} = (w_b - w_0/b) - \frac{M_0^* b}{6D} - \frac{2M_b^* b}{6D},\ (\eta=1). \qquad (7)$$

せん断力をSとすれば 一般に $$S=-D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right)=-D\frac{\partial\Delta W}{\partial y} \qquad (8)$$

(4),(6),(8)式より

$$\left.\begin{aligned} S_{ob}&=\frac{1}{b}(M_b^*-M_o^*)-\frac{D}{b}(\ddot{W}_b-\ddot{W}_o)+\frac{2b}{6}(\ddot{M}_o^*-D\ddddot{W}_o)+\frac{b}{6}(\ddot{M}_b^*-D\ddddot{W}_b)\\ S_{bo}&=\frac{1}{b}(M_b^*-M_o^*)-\frac{D}{b}(\ddot{W}_b-\ddot{W}_o)-\frac{b}{6}(\ddot{M}_o^*-D\ddddot{W}_o)-\frac{2b}{6}(\ddot{M}_b^*-D\ddddot{W}_b)\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

3. つり合条件式およびW_rとM_r^*のフーリエ変換式

帯板の境界r点でスロープが連続していることを考慮すれば(7)式から

$$\frac{W_{r+1}-2W_r+W_{r-1}}{b}+\frac{b}{6D}\left(M_{r+1}^*+4M_r^*+M_{r-1}^*\right)=0 \qquad (10)$$

荷重はr点に作用するものとし,P_rであらわせば 帯板のr点において せん断力は等しいから

$S_{r,r+1}-S_{r,r-1}=-P_r$ となる。 従って(9)式から

$$\frac{M_{r+1}^*-2M_r^*+M_{r-1}^*}{b}-\frac{D}{b}(\ddot{W}_{r+1}-2\ddot{W}_r+\ddot{W}_{r-1}) \quad \frac{b}{6}(\ddot{M}_{r+1}^*+4\ddot{M}_r^*+\ddot{M}_{r-1}^*)-\frac{bD}{6}(\ddddot{W}_{r+1}+4\ddddot{W}_r+\ddddot{W}_{r-1})=-P_r \qquad (11)$$

(10) (11)式をそれぞれx方向にフーリエ 換し,更にr方向にフーリエ定和分変換をすると,

$$-\frac{1}{b}\left[\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i\overline{W}_n-\overline{W}_o\right\}+D_iS_i[\overline{W}_{r\cdot m}]\right]-\frac{b}{6D}\left[\sin^{i}\quad)^i\overline{M}_n^*-\overline{M}_o^*\right\}+D_iS_i[\overline{M}_{r\cdot m}^*]\Big]+\frac{b}{D}S_i[\overline{M}_{r\cdot m}^*]=0 \qquad (10)'$$

$$-\frac{1}{b}\left[\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i\overline{M}_n^*-\overline{M}_o^*\right\}+D_iS_i[\overline{M}_{r\cdot m}^*]\right]-\frac{D}{b}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\left[\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i\overline{W}_n-\overline{W}_o\right\}+D_iS_i[\overline{W}_{r\cdot m}]\right]+\frac{b}{6}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\left[\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i\overline{M}_n^*-\overline{M}_o^*\right\}+D_iS_i[\overline{M}_{r\cdot m}^*]\right]$$

$$-b\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2S_i[\overline{M}_{r\cdot m}^*]+\frac{bD}{6}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\left[\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i\overline{W}_n-\overline{W}_o\right\}+D_iS_i[\overline{W}_{r\cdot m}]\right]-bD\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4S_i[\overline{W}_{r\cdot m}]+S_i[\overline{P}_{r\cdot m}]=0 \qquad (11)'$$

(10)' (11)'式から$S_i[\overline{M}_{r\cdot m}^*]$と$S_i[\overline{W}_{r\cdot m}]$が求まり 逆変換により$W_r$, M_r^*が求まる。

$$\left.\begin{aligned} M_r^*(x)&=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}S_i[\overline{M}_{r\cdot m}]\sin\frac{i\pi}{n}r\cdot\sin\frac{m\pi}{l}x\\ W_r(x)&=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}S_i[\overline{W}_{r\cdot m}]\sin\frac{i\pi}{n}r\cdot\sin\frac{m\pi}{l}x\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ここで $M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)=M_r^*(x)-D\nu\frac{\partial^2 W_r(x)}{\partial x^2}$, $M_x=\nu M_r^*(x)-D\frac{\partial^2 W_r(x)}{\partial x^2}$ である。

4. 数値計算例

厚さ4cm, 2m四方の4辺単純支持の矩形板について 1 tonの Point loadと Line loadを板の中央にそれぞれ載荷した場合,板の中央点におけるたわみとモーメントを4分割($r=1,2,3,4$)の場合で計算し,TIMOSHENKOの値と比較した。

Line load

	本 法	TIMOSHENKOの値
M_y	125.0 kg·cm	127.0 kg·cm
M_x	94.0 kg·cm	92.0 kg·cm
W	0.0229 cm	0.0219 cm

Point load

	本 法	TIMOSHENKOの値
M		
W	0.0395 cm	0.0375 cm

5. 結び

計算例にあるように 本方法によれば 4分割でもかなり良い値を与えることがわかる。本方法では, n分割の場合$(n-1)$個の有限級数和を求めるのみであり,定和分変換を用いることにより,連立方程式の元数も,格段に少なくできる。また 平板の断面が段階的に変化する場合にも 容易に適用できる。

［参考文献］

1). S.G. Nomachi : A Note on Finite Fourier Transform concerning Finite Integration (Trans. Mem. Vol. 5, No 2)

2). TIMOSHENKO, KRIEGER : THEORY OF PLATES AND SHELLS.