

大阪市立大学工学部 正員 倉田 宗章

"

" 〇谷 平 勉

§1. まえがき; 従来より、Regularな形の板については、多数の研究がなされ実用に供されているが、異形板については、ある種の特定の形、又は特定の境界条件の板について、いくつかの論文がみられるようであるが、一般的な異形板については、普遍的な厳密解は見当らないように思われる。板の解析に対する有力な近似解法として有限要素法があるが、要素の形が異形であれば、計算上不利な面が多いようである。本研究は、任意の四辺形板の曲げに対する実用解を提供しようとするもので、解法としては、適当な直線群の網目を用いて、各要素に交角の異なる斜交座標上の、任意の周囲の辺で板の式を表現するような階差法を用いた。板形は凸四辺形に限るが、一般に、その極限として三角形板にも適用することができる。境界条件としては、自由、単純、固定の3種が任意に組合すことができるようにした。

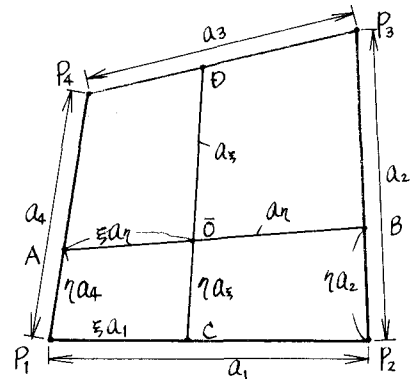


図1

§2. 網目のきざみ方; 図1のように任意四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ において、 P_1P_4 上の内分比 η の点 A と、 P_2P_3 の内分比 η の点 B を結ぶ直線と、同じく残りの辺における内分比 η の点 C および D を結ぶ直線との交点 O は、AB、CD をそれぞれ互いに内分比 η に分割するという幾何学的性質より、図2のように各対辺を N, M 等分すると、各直線は互いに等分しあう。従って、4点 $P_1P_2P_3P_4$ の座標、および、分割数 N, M を与えると、各網目間隔 λ_i, μ_j , P_{ij} 点の座標、 u_i 軸、 v_j 軸のなす角 θ_{ij} が規則的に計算できる。

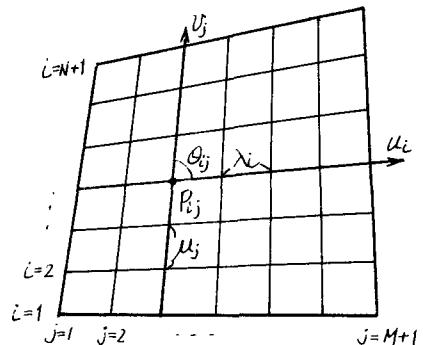


図2

§3. Δf の階差表示;

交点 O の斜交座標 u, v に於ける Laplacian は

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] \quad \dots (1)$$

一般点 P_{ij} を拡大し、近傍の点および、その点の u_i, v_j 座標を図3のように Notation を行う。(1) 式の第1項および第3項の階差表示は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} [f_1 - 2f_0 + f_3], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_j^2} = \frac{1}{\mu_0^2} [f_2 - 2f_0 + f_4] \quad \dots (2)$$

第2項については、まず、2変数関数の Taylor 展開

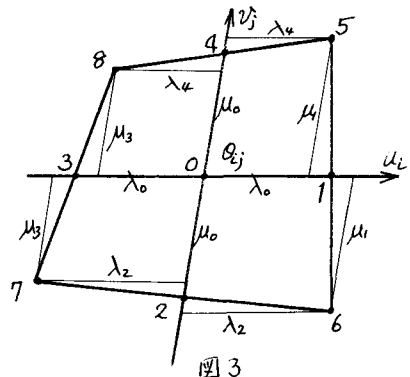


図3

$$f(u+\lambda, v+\mu) = f(u, v) + (\lambda \frac{\partial}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial v}) f(u, v) + \frac{1}{2} (\lambda \frac{\partial}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial v})^2 f(u, v) + O^3(\lambda, \mu) \quad \dots (3)$$

を、5点 (λ_4, μ_4) , 6点 $(\lambda_2, -\mu_1)$, 7点 $(-\lambda_2, -\mu_3)$, 8点 $(-\lambda_4, \mu_3)$ について施し、 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{1}{2\lambda_0} (f_1 - f_3)$, および
 $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{2\mu_0} (f_4 - f_2)$ と(2)より $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ を算出し、高次の誤差が消えるように平均すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \left\{ (\mu_3 - \mu_1) (\lambda_4 - \lambda_2) \left[\frac{1}{\lambda_2 \lambda_4 \mu_1 \mu_3} + \frac{1}{\mu_1 \mu_3 \lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_4 \mu_0^2} \right] f_0 + \frac{(\mu_3 - \mu_1) (\lambda_2 - \lambda_4)}{2\lambda_0^2 \mu_1 \mu_3} (f_1 + f_3) + \frac{(\mu_3 - \mu_1) (\lambda_2 - \lambda_4)}{2\mu_0^2 \lambda_2 \lambda_4} (f_2 + f_4) \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_4 \mu_1} f_5 - \frac{1}{\lambda_2 \mu_1} f_6 + \frac{1}{\lambda_2 \mu_3} f_7 - \frac{1}{\lambda_4 \mu_3} f_8 \right\} \quad \dots (4)$$

(2), (4)を(1)に代入して Δf を得る。今たわみを w とし、 $\Delta w = F$ とおく。各点の Δf が計算されておれば、板の式 $\Delta \Delta w = \Delta F = \frac{q}{D}$ より、境界条件を考慮しながら、適当に、たわみに関する連立方程式の係数行列を組立てることができる。

§4. 境界条件;

1) 単純支持辺; $F = 0, w = 0$

2) 自由辺に於ける F ; $M_n = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right] = 0 \quad \dots (5)$

$$F = \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \\ \therefore F = (1-\nu) \frac{1}{\mu_0^2} (w_2 - 2w_0 + w_4) \quad \dots (6)$$

自由辺上の ΔF 式の階差表示; 図4のように、0点より自由辺402に垂直な線が516線と交る点をB、0点に對しBと対称な仮想点をAとすると、

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} = \frac{1}{\mu_0^2} (F_2 - 2F_0 + F_4) + \frac{1}{e_1^2} (F_A - 2F_0 + F_B) \quad \dots (7)$$

$iB = g_1 \mu_1$ とし B点の値を5, 1, 6点の値の2次補間によって計算すると、

$$F_B = (1-g_1)(1+g_1)F_1 + \frac{1}{2}g_1(g_1-1)F_5 + \frac{1}{2}g_1(g_1+1)F_6 \quad \dots (8)$$

また、自由辺反力 $V_n = 0$ より、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial v} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial v} = \frac{\partial F}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) = \frac{1}{2e_1} (F_B - F_A) + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) = 0$$

$$\therefore F_A = F_B + 2e_1(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad \dots (9) \quad \text{ここへ} \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) = \frac{1}{\mu_0^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_2 - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_4 \right] \quad \dots (10)$$

この自由辺に垂直方向の slope $\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$ は、例えば0点においては $M_n = 0$ を利用して外点Aのたわみ w_A を消去すると、
 $\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_0 = \frac{1}{2e_1} (w_0 - w_A) = \frac{1}{2e_1} \left\{ w_B - \left[2 \left(\nu \frac{e_1^2}{\mu_0^2} + 1 \right) w_0 - \nu \frac{e_1^2}{\mu_0^2} (w_2 + w_4) - w_B \right] \right\}$

w_B についても(8)と同様の2次補間を行うと、
 $\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_0 = \frac{1}{e_1} \left\{ \nu \frac{e_1^2}{2\mu_0^2} (w_2 + w_4) - \left(\nu \frac{e_1^2}{\mu_0^2} + 1 \right) w_0 + (1-g_1^2) w_1 + \frac{1}{2} g_1(g_1-1) w_5 + \frac{1}{2} g_1(g_1+1) w_6 \right\} \quad \dots (11)$

$\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_2, \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_4$ についても同様である。この(11), (10), (9), (8) を(7)式に代入すると ΔF は図4の各点の F および w で表わすことができる。

3) 固定辺; $w_2 = w_0 = w_4 = 0, w_A = w_B$ の条件と、 w_B を(8)式と同様の補間をすることにより、

$$F = \frac{1}{e_1^2} (w_A - 2w_0 + w_B) = \frac{2}{e_1^2} w_B = \frac{2}{e_1^2} \left[2(1-g_1^2) w_1 + g_1(g_1-1) w_5 + g_1(g_1+1) w_6 \right] \quad \dots (12)$$

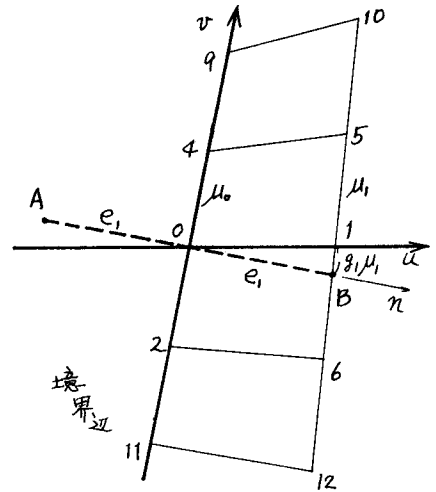


図4

5 数値計算例;

1). 全周単純支持板

a. 図5のような寸法の板に等分布荷重を載せた場合について、 $\nu=0.3$ で計算した結果を示す。
網目のきざみ数 N をかえた場合の C 点 $(0.55a, 0.55a)$ のたわみ、および曲げモーメントの収束性を調べる。 [たわみ: $\frac{qa^4}{b}$]
[曲げモーメント: qa^2]

きざみ数 N	w_c	$[w_c]_N / [w_c]_{N-1}$	M_{xc}	$[M_{xc}]_N / [M_{xc}]_{N-1}$
4	0.0055949		0.053744	
6	0.0056326	1.0068	0.055157	1.0263
8	0.0056469	1.0025	0.055685	1.0096
10	0.0056536	1.0012	0.055930	1.0044
12	0.0056571	1.0006	0.056070	1.0025
14	0.0056592	1.0004	0.056150	1.0014
16	0.0056602	1.0002	0.056200	1.0009
18	0.0056606	1.0001	0.056223	1.0006

表1

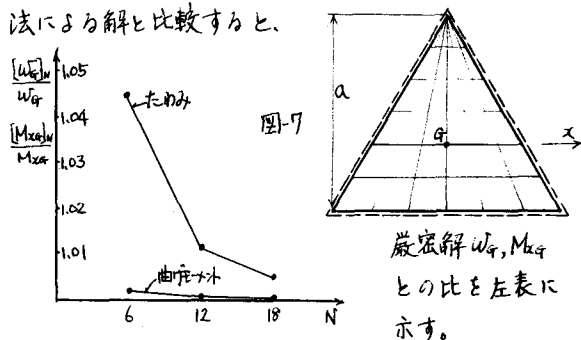
参考のため一辺 $1.2a$ 及び a の正方形板の中央奥のたわみ、および曲げモーメントを示すと、

辺長	w_c	M_x
$1.2a$	0.00842	0.0993
a	0.00479	0.0406

表2

b. 同様に図8のような板について収束性を示す。

c. 解析解の存在する正三角形板について、本方法による解と比較すると、



d. 平行四辺形の場合には、普通の斜交座標で表わしたのと全く同一になるがプログラムの一般性を検証するため計算した結果を示す。

表3

	岡村氏	小松氏	Fischmeister	本法 10きざみ	20きざみ
中心 w_G	0.00397	0.00394	0.00397	0.003954	0.003963
中心 M_G	0.0468	0.0464	—	0.04678	0.04693

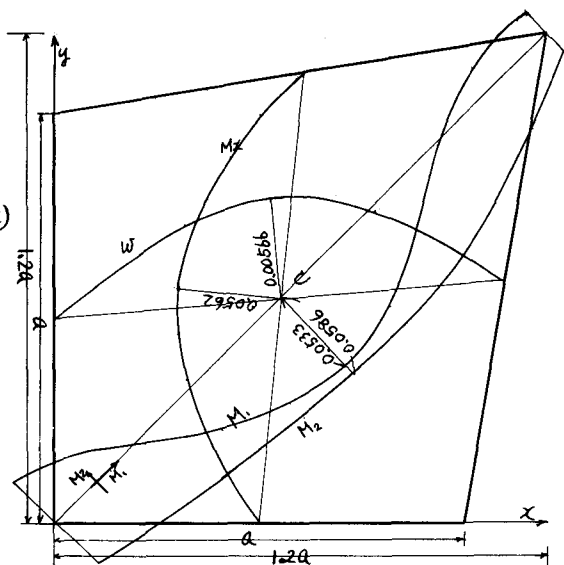


図5.

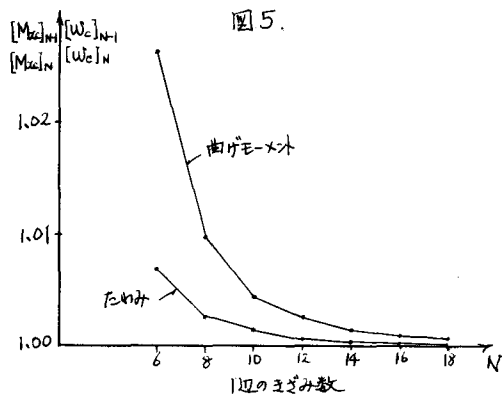


図6

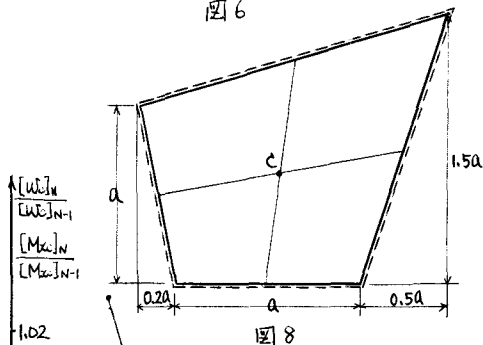
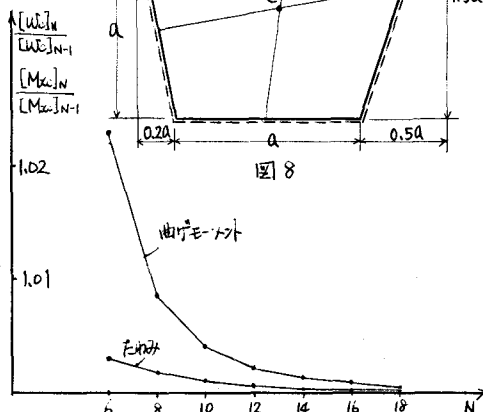


図8



2). 相対2辺が単純支持、他が自由;

a. 図5と同様の形で支持条件が図9のような板についてやはり等分布荷重を載せ、 $\nu=0.3$ の場合について計算した結果を示す。

	w_c		M_{vc}	
4	0.014513		0.14232	
6	0.018976	1.028	0.14236	1.000
8	0.018751	1.012	0.14208	1.002
10	0.018549	1.011	0.14116	1.007

表3

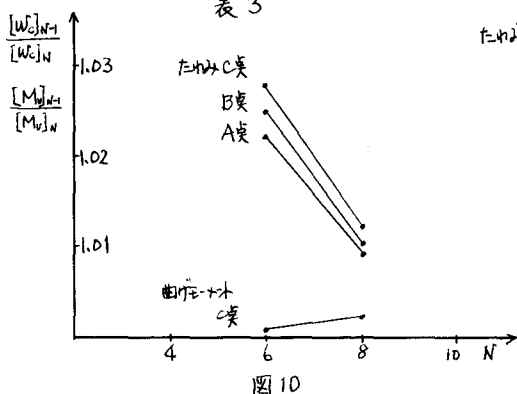


図10

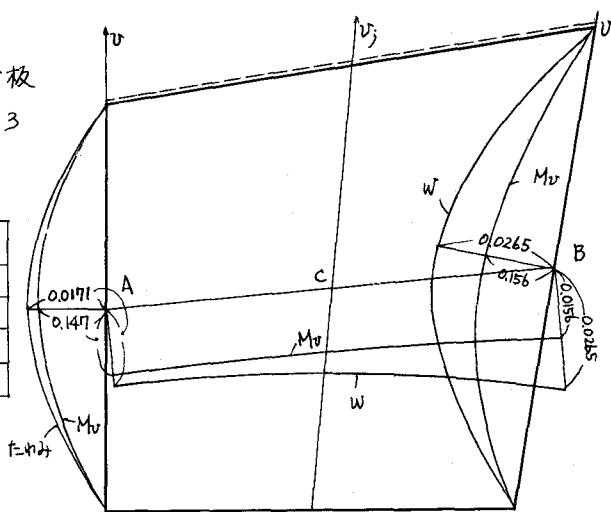


図9

b. 図11は図示のような形の板についての計算結果を示す。この板の自由辺の長い方は短い方の2倍であり各辺の中央点に於て収束性をしらべ、網目の粗密による精度の差を調べた結果を図に示す。

5 あとがき; 全周単純支持の場合は、非常に収束性がよく、直交網目の階差による場合と同様、8まごみ程度で十分良精度の解がえられる。自由辺のある場合には、それよりいく分精度が落ちるが、10まごみ程度で、せいぜい1%以下で、実用的には十分と考えられる。板形が非常にいびつになって局部的に網目の粗い部分ができる場合には、その部分が一定の精度になるように、全体の網目を細かくする必要があるがそれによる不利益は、手順の一貫性(プログラムの一貫性)という利益を相殺するとまでは至らないと思われる。

固定辺のある板、およびその他の支持辺が組合された板についての計算、および集中荷重による場合の収束性等について、又次の機会に発表したい。

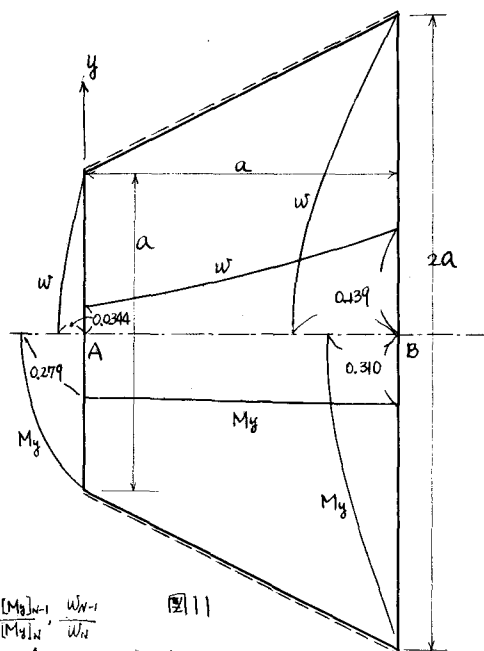


図11

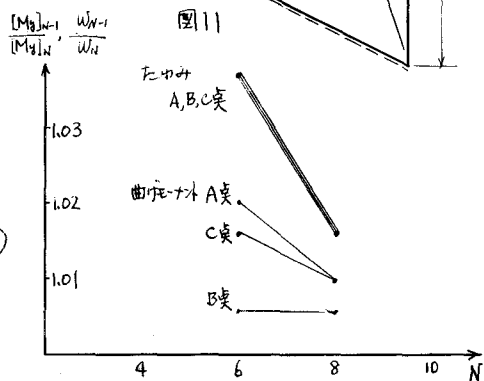


図12