

名古屋工業大学 正員 岡林 稔

正員 長谷部宣男

きえがき 与えられた境界条件のもとで2次元弾性問題を解くには、一般に Fredholm の積分方程式と解かねばならないが、これを解くことは一般に容易でない。しかし与えられた領域が有理関数によって単位円(文献1)や半平面(文献2)に等角写像されるときには、積分方程式を解くことなく閉じた解が得られる。従って与えられた領域を単位円や半平面に等角写像する関数が有理関数でない場合には、いかにして精度のよい有理近似写像関数を作るかが問題である。本論文では、ラーメン隅角部の領域を単位円に写像する有理近似写像関数を1次分数式の和の形に求め、Muskhishvili の方法(文献1)によって応力解析を行った。

写像関数 (図-1)に示すようなZ平面上の中1.0の折曲がった無限長の帯をj平面上の単位円に等角写像する関数は、

Schwarz - Christoffel の変換を用いて

$$Z = \frac{2}{\pi} \int \frac{1}{1+j^2} \left(\frac{1+j}{1-j} \right)^{1-2p} dj \quad (1)$$

と表わされる。ここにPは隅角部の角度を表わすパラメーターであり、隅角点A, BおよびC, D点は、単位円上の点 $j = 1, -1$, および $i, -i$ にそれぞれ対応させた。

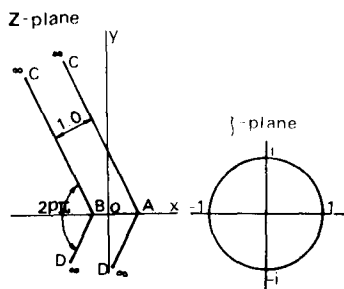


Figure-1

式(1)は $j = \pm 1$ において帯の無限長に伸びる対数的特異点であり、 $j = \pm i$ においては隅角点を持つ特異点である。そしてこれらの点の近傍においてはどの写像関数の収束が極めて遅くなることを考慮して次のように変形する。

$$Z = \frac{2}{\pi} \int \left[\frac{A_1 + A_2}{1+j^2} + \sum_{k=2}^{\infty} A_k j^k \right] dj = \frac{2}{\pi} \int \frac{A_1 + A_2}{1+j^2} dj + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} A_k \int j^k \quad (2)$$

これは $j = \pm 1$ の特異点を表わす項(オ1項)とそれ以外の項とに分離してべき級数展開した項とで表わしたもので A_1, A_2 の値は計算の結果 $A_1 = \sin p\pi$, $A_2 = \cos p\pi$ である。そして(2)式のオ1項 $\int \frac{(A_1 + A_2)}{(1+j^2)} dj$ をべき級数に展開した級数とオ2項 $\sum_{k=2}^{\infty} A_k \int j^k$ のべき級数の収束の速さが違ふことを考え、これらの各々について有理近似写像関数を1次分数式の形で作るものとする。

$\int \frac{(A_1 + A_2)}{(1+j^2)} dj$ の項についてその作り方を説明する。オ1項と

$$\int \frac{A_1 + A_2}{1+j^2} = \frac{A_1 + A_2}{2} \int \frac{dj}{1+i} + \frac{A_1 - A_2}{2} \int \frac{dj}{1-i} \quad \text{と変形して、このうちの} \int \frac{dj}{1-i}$$

を、 $\int \frac{dj}{1-i}$ をべき級数に展開すると

$$\int \frac{dj}{1-i} = j + \frac{i}{2} j^2 + \frac{i^2}{3} j^3 + \dots + \frac{i^{k-1}}{k} j^k + \dots \quad (3)$$

と表わされ、 j^k の係数を Q_k と表わすとする。そして式(3)に対する近似写像関数として1次分数式

の和の形で

$$\sum_{k=1}^N \frac{B_k}{1-i\beta_k} = \sum_{k=1}^N \left[B_k (1+i\beta_k) + i\beta_k^2 + \dots \right] \quad (4)$$

を考える。ここに $|\beta_k| < 1$ である。N は一次分数式の個数を表わす。そして式(3)と(4)が近似的に等しくなるように式(4)の中に含まれて11る2N個の未定実数 B_k, β_k を定めようとするもので、本論文においては $N=12$ 個の分数式を選んだ。そして B_k, β_k を定めるために式(3)と式(4)と両次のべき乗の係数において等しくなるように選んだ。すなわち $a_2, a_3, a_4, a_5, a_{16}, a_{24}, a_{32}, a_{40}, a_{128}, a_{192}, a_{256}, a_{320}, a_{1024}, a_{1536}, a_{2048}, a_{2560}, a_{3136}, a_{3744}, a_{4352}, a_{4960}, a_{5568}, a_{6176}, a_{6784}, a_{7392}, a_{8000}$ の24個である。これより未定実数 B_k, β_k を定める式は、次の24個の式になる。

$$\begin{aligned} B_1\beta_1^2 + B_2\beta_2^2 + \dots & \dots + B_{12}\beta_{12}^2 = a_2 \\ B_1\beta_1^3 + B_2\beta_2^3 + \dots & \dots + B_{12}\beta_{12}^3 = a_3 \\ \vdots & \vdots \\ B_1\beta_1^{16} + B_2\beta_2^{16} + \dots & \dots + B_{12}\beta_{12}^{16} = a_{163840} \end{aligned}$$

Table 1

β	B	β	B
0.9999950932	0.0000129231	0.9999706366	0.0000392487
0.9998992892	0.0001179732	0.9996965892	0.0003168637
0.9991246776	0.0009443304	0.9975051651	0.0025351916
0.9929480356	0.0075570956	0.080137264	0.0272982894
0.9448055399	0.0606644151	0.8510545331	0.1638275903
0.6298235588	0.5040934177	0.2573351818	1.4545547887
γ	C	γ	C
0.9957856189	0.0000330691	0.9814839417	0.0002786409
0.9430563423	0.0017759093	0.8499427039	0.0102485373
0.6400325341	0.0617305281	0.2964707690	0.3628999248
δ	D	δ	D
0.9958896453	0.0000304367	0.9820172293	0.0002366757
0.9457325528	0.0012877766	0.8610029238	0.0055244462
0.6806770841	0.0190152444	0.3788696049	0.4010595740

しかしこれらの式を解析的に解くことは不可能であるので電子計算機を利用して反復繰返し計算により求めた。また $|\beta_k| < 1$ であることはこの結果よりわかる。

この値は(表-1)の最上段に示した。かくして式(3)に対する近似分数式は

$$\frac{d_j}{1-i} \doteq 1 + \sum_{k=1}^{12} \left[\frac{B_k}{1-i\beta_k} - B_k - iB_k\beta_k \right] \cdot \frac{1}{i} \quad (5)$$

の形で求める。また式(5)の B_k, β_k が求まれば $\int d_j/(1+i)$ に対する近似分数式は、式(5)の B_k, β_k の値を負にしたものを用いられよう。

次に、式(2)のべき級数の部分に関する近似分数式の作り方も同様の方法によって作ることが出来るが、級数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k j^k$ の収束の仕方偶数べきと奇数べきとによって違ふことを考慮して偶数べき、奇数べきの各々に対して次のような分数式の形で求めた。

$$\text{偶数べきに対して } \sum_{k=1}^6 \left[C_k / (1-\beta_k^2) \right], \quad \text{奇数べきに対して } \sum_{k=1}^6 \left[D_k / (1-\delta_k^2) \right].$$

ここに分数式の個数は、2次の形で各々6個を選んだ。未定実数 C_k, β_k と D_k, δ_k を定めるために選んでみたべき級数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k j^k$ の係数は、偶数べきに対して $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{14}, A_{16}, A_{18}, A_{20}, A_{22}, A_{24}$, 奇数べきに対して $A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}, A_{13}, A_{15}, A_{17}, A_{19}, A_{21}, A_{23}$ を選んでみた。そして $C_k, \beta_k, D_k, \delta_k$ の値を定める方法は、 B_k, β_k の値を求めたのと同じで電子計算機で反復計算させた。 C_k, β_k や D_k, δ_k の値は、ラーメン隅角部の角度のパラメータPによって変わり、1例として $2P\pi = 130^\circ$ のときの値を(表-1)に示した。

以上まとめると、ラーメン隅角部の領域を単位内に写像する有理近似写像関数は、多少の変形を行って次のように書かれる。

$$\begin{aligned} Z = \omega(j) = & \frac{2}{\pi} \left[\left(1 - \sin P \left(\sum_{k=1}^{12} B_k - \sum_{k=1}^6 D_k \right) \right) + \left(\cos P \left(\sum_{k=1}^{12} B_k - \sum_{k=1}^6 C_k \right) - \frac{\cos P + i \sin P}{2} \sum_{k=1}^{12} \frac{B_k}{1-i\beta_k} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\cos P - i \sin P}{2} \sum_{k=1}^{12} \frac{B_k}{1+i\beta_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left(\frac{C_k}{1-\beta_k} + \frac{C_k}{1+\beta_k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left(\frac{D_k \beta_k}{1-\delta_k} - \frac{D_k \beta_k}{1+\delta_k} \right) \dots \right] \quad (6) \end{aligned}$$

これは ζ の 1 次項と 48 コの 1 次分数式の和の形で表わされている。そしてこの近似分数式の表わす領域を $2p\pi = 130^\circ$ の場合について (図-2) に示した。(図-2) において隅角部 A, B は本ものならば角点であるが、近似写像関数のため小さな丸味がついている。(表-2) には、各角度について A, B 点の曲率半径等を示した。各角度の上の数字が A 点、下の数字が B 点の値である。

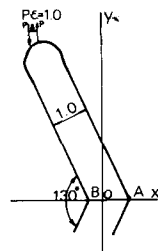


Figure 2

1 次分数式の係数 B_k, β_k と $C_k, \gamma_k, D_k, \delta_k$ を定めらためのべき級数の係数の選び方は、いくともあるわけであるが、これはべき級数の収束の仕方、速さ等を考慮して選ぶ必要がある。また作った近似写像関数式 (6) の一次導関数が単位円内で零点を持たないことを確かめる必要があるが、これを解析的に確かめることは容易でないようである。しかし今の場合、単位円内に零点の出来ようなのは式 (1) からわかるように $\zeta = -1$ の近傍である。従って $\zeta = -1$ の近傍で単位円内に零点があれば、(図-2) に示した境界線は、B 点でループを描くことになり、(表-2) に示した B 点の曲率は正になる。だからこの曲率の正負により零点の有無を判定することが出来る。

応力計算の基本式 複素応力関数 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ を用いて Z 平面上の応力は、Kolosoov-Muskhelishvili の表示より

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} [\varphi(\zeta) / \omega'(\zeta)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [\overline{\omega(\zeta)} (\varphi(\zeta) \omega'(\zeta) - \overline{\varphi(\zeta)} \overline{\omega'(\zeta)}) / \omega'(\zeta)^2 + \psi'(\zeta) / \omega'(\zeta)] \end{aligned} \quad (7)$$

として満足すべき境界条件式は、単位円周上 $\sigma = e^{i\theta}$ で

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 \equiv H(\sigma)$$

である。ここで $f_1 + if_2$ は、境界条件より求まる関数である。上式両辺に $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ を乗じて単位円周上で積分すると

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} \right) d\sigma + \overline{\psi(\sigma)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

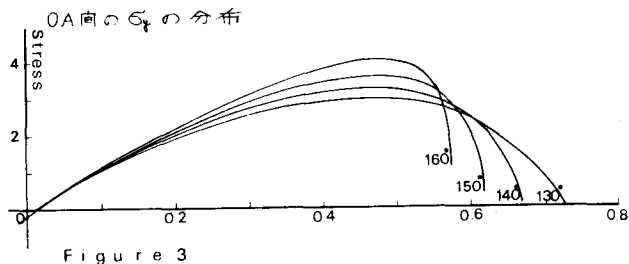
となる。上式より求めたい未知関数 $\varphi(\zeta)$ は、写像関数 $\omega(\zeta)$ が今の場合式 (6) で与えられ、単位円内で正則、単位円外で 49 コの点で 1 位の極を持つ関数であることを考え、また今の場合 (図-2) に示すように領域および境界条件が実軸に関して対称であることを考慮すると多少簡単になり、 $\varphi(\zeta)$ における未定定数について 49 元 1 次の連立方程式を解くことによって複素応力関数 $\varphi(\zeta)$ を定めることが出来る、 $\varphi(\zeta)$ が求まれば $\psi(\zeta)$ は簡単に定まる。

複素応力関数 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ が求まったならば、必要な点の応力は、式 (7) より計算することが出来る。

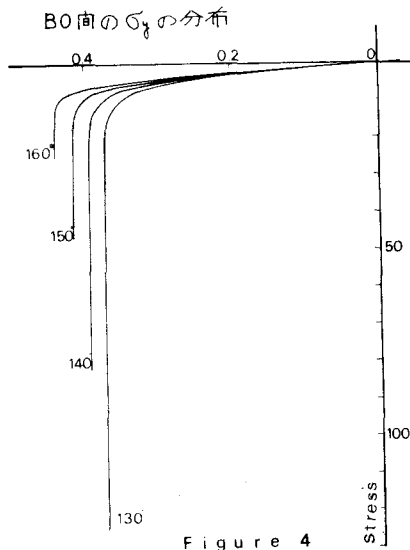
境界条件および応力の計算結果 境界条件として (図-2) に示したようにラーメンの先端に大きな 1.0 の集中偶力をつけた。応力の計算においては、写像関数と $2p\pi = 130^\circ \sim 165^\circ$ の間の角度で作った (図-2) に示す対称軸上の AB 間における応力 σ_x, σ_y (当然のことながら $\tau_{xy} = 0$)

と求めた。そしてこれらの結果を(図-3~6)に示した。

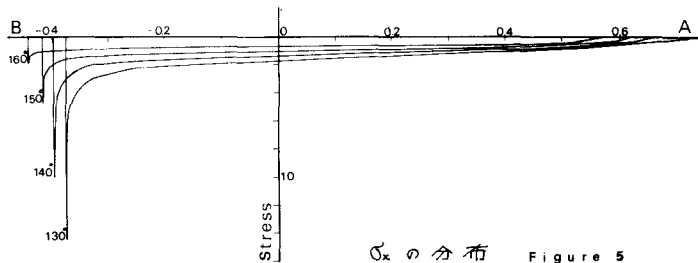
(図-3)においては、横軸は $\overline{OA}$ の距離(ラーメンの帯の中を1.0として、図-4, 5, 6においても同じ)、縦軸は σ_y をとった。隅角部のA点の応力は、近似写像函数のため小さな丸味がついて



いることによって、本当にA点で角点ならば応力は0であるのに0になっていない。隅角部の角度の大きい程A点からの応力の分布の傾向は急であるが、これは角度が大きくなる程 $2\pi - \theta = 180^\circ$ (帯状領域)の応力分布に近づくことからも納得できる。(図-4)には、内側の隅角部B点よりO点までの応力分布を示した。B点の応力は、B点が角点ならば無限大になるが小さな丸味がついているため有限である。α(表-2)の曲率半径でかなりの集中応力が述べていることがわかる。そしてこれは角度の小さい程大きく、またB点から少しでも離れると急速に減少しており、これも角度の小さくなる程著しい。(図-5)には、AB間の σ_x の分布を示した。そして(図-6)には、A点を起点として σ_x の分布を 130° より 165° まで 5° きざみに示した。 σ_x の分布はA点



においては角度の小さい程急めらかに増加し、角度の大きくなる程増加の傾向が急である。逆にB点においては、角度の小さい程応力の増加の傾向は急である。そしてB点の丸味の小さい



程応力は急激に変化し、B点が角点になるときは、要点と極が背中合せに存在するようになると思われる。

参考文献

(1) Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity

(2) 岡村: 領域が有理函数によって直線境界

の半平面に等角写像される場合の二次元弾性問題の解法およびくさび状の裂目と有する無限薄板へのその応用。(土木学会論文集才119号 昭40.7)

