

1) まえがき 構造物の最適設計法に關して、著者はすでに構造物の状態変数の偏微係数及び線型計画法を用いて、最適設計を行なう方法についての基本的な考え方を発表しているが、今回はこの理論をトラス構造物に適用した結果について報告するものである。尚、トラス構造物の解析及び偏微係数の計算には変位法を用いた。

2) 最適設計法の概要 本論文に用いた最適設計法の概要を簡単にまとめてみると、次の通りである。即ち、構造物の応力、変位等の状態変数 (Y_j) 及び構造物の総工費又は鋼重量等の目的関数 (C) は一般に設計変数 (X_i) の非線型な関数で表わされる。

$$Y_j = G_j(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad , \quad C = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{--- ①}$$

一方、状態変数 (Y_j) 及び設計変数 (X_i) は、設計示方書等により制限を受け、次のような条件式を満足しなければならない。

$$X_{li} \leq X_i \leq X_{ui} \quad , \quad Y_{lj} \leq Y_j \leq Y_{uj} \quad \text{--- ②}$$

ここに、サフックス l, u はそれぞれ制約条件の下限及び上限を表わす。

①式を、①式を解いて求めた設計変数 (X_i^0) のまわりにテーラー展開して近似的に ΔX_i の一次の項までを考え②式の条件を代入して整理すると、 X_i^0, Y_j^0, C^0 に関して設計変数の微小変化 ΔX_i を変数とする次式のような多元一次不等式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Y_j - Y_j^0 &\leq \sum \left(\frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \right) \Delta X_i \leq Y_{uj} - Y_j^0 \\ X_{li} - X_i^0 &\leq \Delta X_i \leq X_{ui} - X_i^0 \\ C^1 &= C^0 + \sum \left(\frac{\partial C}{\partial X_i} \right) \Delta X_i \end{aligned} \right\} \quad \text{③}$$

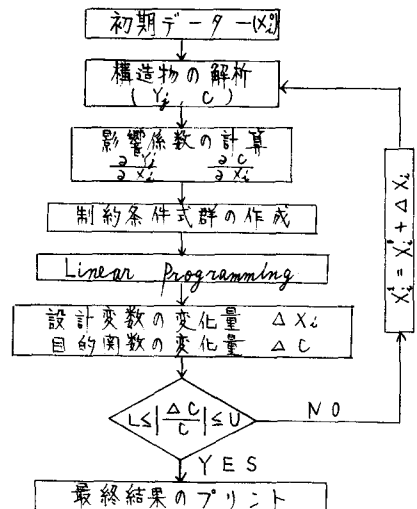
ここに、 $\frac{\partial Y_j}{\partial X_i}, \frac{\partial C}{\partial X_i}$ 等は X_i^0 近傍における Y_j 及び C の X_i の微小変化に対する Y_j 及び C の変化量を示すもので「影響係数」と呼ぶことにする。

上記の不等式群③を線型計画法を利用して解き、 C^1 を最小にする (C^0 は定数であるので $\sum \left(\frac{\partial C}{\partial X_i} \right) \Delta X_i$ を最小にする) ΔX_i を求め、

$$\left. \begin{aligned} X_i^1 &= X_i^0 + \Delta X_i \\ Y_j^1 &= G_j(X_1 + \Delta X_1, \dots, X_i + \Delta X_i, \dots, X_n + \Delta X_n) \\ C^1 &= C^0 + \sum \left(\frac{\partial C}{\partial X_i} \right) \Delta X_i \end{aligned} \right\} \quad \text{④}$$

として最小の C を得るまで上記のサイクルをくり返し、最適の設計変数 (X_i) を求めるものである。この設計法の Macro な流れ図を示すヒョ 1 図のごとくなる。

3) トラス構造物の状態変数及び影響係数の理論式 変位法の理論により、支点の X 軸及び Y 軸に



ヒョ 1 図

平行に支持されているトラス構造物においては、一般に節点の変位 (U_i) 及び部材力 (F) は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} U_i &= (\beta_i \underline{k} \alpha_i)^{-1} P_i = K^{-1} P_i \\ F &= \underline{k} \alpha_i U_i \end{aligned} \right\} \text{⑤}$$

ここに、

$$K = \beta_i \underline{k} \alpha_i$$

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad \left(k_i = \frac{A_i E_i}{L_i} \right) \quad \text{⑥}$$

また K : 剛性マトリックス
 U_i : 節点の変位マトリックス
 P_i : 外力のマトリックス
 $\beta_i = \alpha_i^T$: 部材の connectivity 及び方向余弦に関するマトリックス

したがって、設計変数 (x_i) に関する節点の変位 (U_i) 及び部材力 (F) の影響係数を求めるための理論式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial K^{-1}}{\partial x_i} P_i \quad \text{ただし} \quad \frac{\partial K^{-1}}{\partial x_i} = -K^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_i} \cdot K^{-1} \\ \text{⑤式より} \quad \frac{\partial K}{\partial x_i} &= \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} \underline{k} \alpha_i + \beta_i \frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i} \alpha_i + \beta_i \underline{k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i} \alpha_i U_i + \underline{k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} U_i + \underline{k} \alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \text{⑦}$$

上式中の x_i に関する各偏微係数は設計変数 (x_i) の性質によりそれぞれ異なる計算式を用いなければならない。たとえば、設計変数としてトラスの各部材の断面積 (A_i) を考える場合には、トラスの Geometry のみに関係するマトリックス α_i, β_i の偏微係数はすべて 0 となり $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_i}$ は次式のように簡単にすることが出来る。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \beta_i \frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i} \alpha_i, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i} \alpha_i U_i + \underline{k} \alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad \text{--- ⑧}$$

ここに、 $\frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i}$ は、オ④式に示すように着目している部材 i に関する項のみ 0 でなく、他の要素はすべて 0 となるマトリックスとなる。

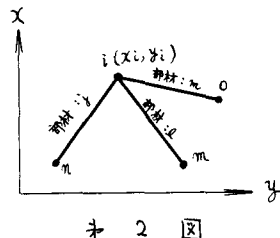
$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i} = \textcircled{+} \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{+} & 0 \\ \vdots & \frac{E_i}{L_i} & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- ⑨}$$

また、トラスの各節点の座標 (x, y) を設計変数と考える場合には、 $\frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i}$ は着目する節点 (i) に接続している部材すべてに関して次式が成立し、他の部材に関しては 0 となるマトリックスとなる。(オ 2 図参照)

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial k_i}{\partial x_i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial k_i}{\partial x_i} & 0 & \frac{\partial k_i}{\partial x_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial k_n}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad \text{--- ⑩}$$

着目節点 (i) の y 座標が設計変数である場合には、上式の $\frac{\partial k_i}{\partial x_i}$ は次式で表わされる。

$$\frac{\partial k_i}{\partial x_i} = \textcircled{+} \frac{A_i E_i (y_n - x_i)}{L_i^3} \quad \text{--- ⑪}$$



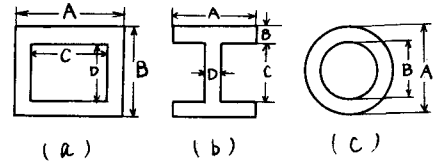
上式は着目節点(i)が部材(j)の⊕の節点である場合は⊖, ⊖の節点である場合には⊕となり。

又 $\frac{\partial x_i}{\partial x_i}$, $\frac{\partial y_i}{\partial x_i}$ も着目する節点(i)に接続している部材の方向余弦の偏微係数を各要素に持つマトリックスであり、部材(j)の方向余弦の偏微係数は、節点(i)のy座標が設計変数の場合は次式で求めることができる。

$$\frac{\partial \cos \theta_j}{\partial x_i} = \frac{\ominus}{\oplus} \frac{(x_i - x_n)(x_i - y_n)}{L_j^3}, \quad \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial x_i} = \frac{\oplus}{\ominus} \frac{L_j^2 - (x_i - y_n)^2}{L_j^3} \quad \text{--- ⑩}$$

4) トラス構造物における設計変数

トラス構造物において考えられる設計変数としては、部材の断面寸法、各節点の座標等が考えられる。しかし、部材の各断面寸法を設計変数と考えたとオ3図に示すように、各部材につき2~4個の設計変数が生じ、トラス構造物の部材数が多い場合には構造物全体としての設計変数は非常に多くなり、Linear Programming を用いて制約条件式を解くために必要とするマトリックスは非常に大きくなり実際の計算上あまり好ましいこととは言えない。そこでトラス構造物においては、部材の設計変数として断面寸法のかわりに断面積(A_i)を選ぶ方がよいと思われる。一方、部材は許容応力度及び細長比等に対する制約条件を満足しなければならず、これらの制約条件は断面寸法の関数である。したがって、部材の断面積を設計変数に選ぶ場合には、まず部材の断面積と、その断面積における最大許容応力度との関係式を作成しておくことが必要となる。即ち部材断面の Sub-Optimization が要となるわけである。



オ 3 図

5) 部材断面の Sub-Optimization 部材の断面積と絶対最大許容応力度との関係を得るため、まず長さLの部材がPなる荷重を受けるときの最小の断面積及びその断面寸法を求め、今、例として箱形断面の圧縮材を考えると(オ3-(a)図)この場合の設計変数はA, B, C, Dの4つであり、部材の制約条件として「容接鋼道橋設計示方書」に従うものとするれば、部材の材質がSS41の場合には、細長比 $\lambda = \frac{L}{r} \leq 120$, 許容応力度 σ_{ca} は次式で表わされる。

5) 部材断面の Sub-Optimization

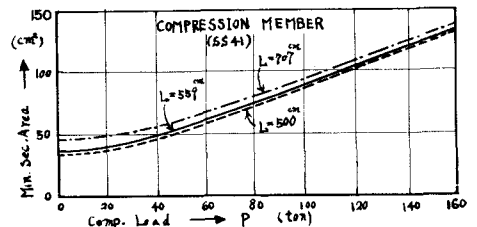
部材の断面積と絶対最大許容応力度との関係を得るため、まず長さLの部材がPなる荷重を受けるときの最小の断面積及びその断面寸法を求め、今、例として箱形断面の圧縮材を考えると(オ3-(a)図)この場合の設計変数はA, B, C, Dの4つであり、部材の制約条件として「容接鋼道橋設計示方書」に従うものとするれば、部材の材質がSS41の場合には、

細長比 $\lambda = \frac{L}{r} \leq 120$, 許容応力度 σ_{ca} は次式で表わされる。

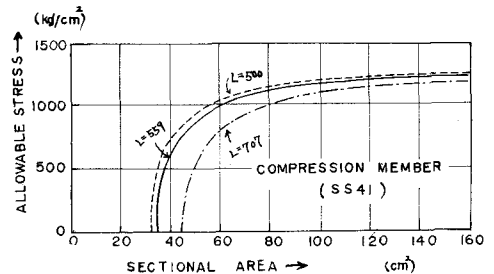
$$\begin{aligned} 0 < \lambda/r \leq 110 \text{ において} & \quad \lambda/r > 110 \text{ において} \\ 1,300 - 0.06(L/r)^2 & \quad 7,200,000/(L/r)^2 \end{aligned}$$

また板厚は 8mm 以上又は $1/40$, $1/40$ 以上でなければならない。

上記の制約条件を満足しつつ最小の断面積を求め、ために部材の断面積、断面二次モーメント、許容応力度、細長比等の関数を設計変数A, B, C, Dで偏微分し、各影響係数を求め、Linear Programmingにより各荷重に対する最小断面積を求めてみるとオ4図のような関係曲線が得られる。この荷重-最小断面積のグラフより各断面積における許容応力度を求めてみるとオ5図の如くなる。したがって部材の実応力がこの許容応力度よりも



オ 4 図



オ 5 図

小さければ、その部材は許容応力度のみならず部材の細長比、板厚等部材断面のすべての設計条件を満たしていることになる。引張材についても同様の関係曲線が得られる。

6) 線型計画法の利用及び結果の収斂性について 3), 5) より求めた影響係数及び断面積—最大許容応力度より、部材の許容応力度及び節点の変位等について ΔX_i に関する制約条件式群を作成し、L.P を利用してこれらの不等式群を解くことにより、最適の設計変数 (X_i) を求めることができる。しかし、状態変数、目的関数は一般に X_i の非線型関数であり $\frac{\partial Y_i}{\partial X_i}$, $\frac{\partial C}{\partial X_i}$ は X_i の値により変化するので ΔX_i を設計制約条件のみより定めると結果が振動又は発散し最適解に収斂しないことがしばしば生ずる。したがってこのような場合には最適解へ良好に収斂させるために、すでに①で述べたように ΔX_i の値をある程度の大きさに制限する条件式、

$$- \delta X_i \leq \Delta X_i \leq \delta X_i$$

を更に加える必要がある。又構造物によつては、目的関数 (C) が最適解に近づくにしたがって式のものをしていかに小さくしていく方がよりよい収斂を示す場合がある。

7) 計算例 上記の理論を適用した計算例を次に示す。

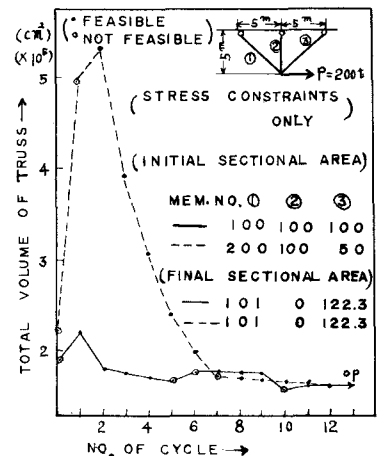
① オ6図に示すトラスの各部材の断面積を設計変数とし、応力の制約条件のみから最適部材断面を求めた結果をオ6図に示す。初期の部材断面積を極端に変えた場合にも同一結果に達することより global な最適解を得たことがわかる。又、最適解では部材④の断面積は0となり不必要であることもわかる。

② ①のトラスで、応力の制約条件に更に節点1のX及びY軸方向の変位を4mm以内に制限する制約条件を追加した結果をオ7図に示す。この場合は節点1のX軸方向の変位の制限がもたらすきびしい条件となり、部材①及び③の断面積は①の結果より相当大きくなり、応力的には余裕のある断面となっている。(global op.)

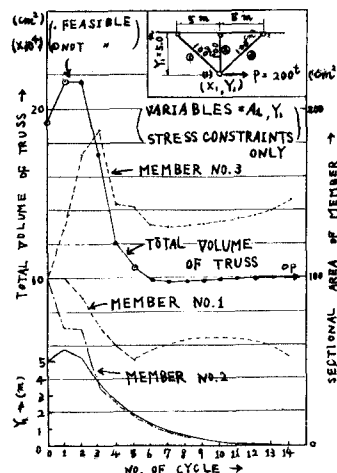
③ ①のトラスで部材の断面積 (A_i) のみならず節点1のY座標 (Y_1) をも設計変数とし、最適の A_i 及び Y_1 を求めた結果をオ8図に示す。最適解に近づくにつれて

Y_1 及び A_2 はしだいに0に近づき最適解では Y_1 , A_2 ともに0となっている。この結果は一見して global な最適解であることがわかる。

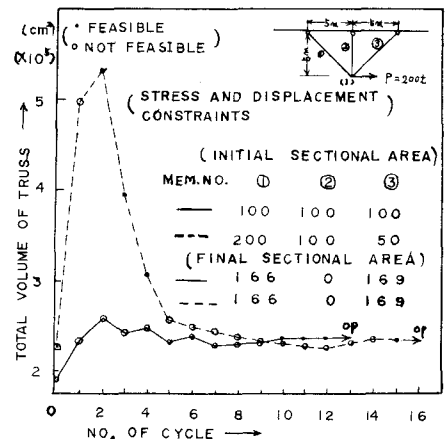
① S. OKUBO "OPTIMUM DESIGN OF COMPOSITE PLATE GIRDER SUPERSTRUCTURES, C.E. Thesis M.I.T. 1965
 大久保 祐二「構造物の最適設計法について」オ21回学術講演会 昭41年



オ6図



オ8図



オ7図