I-28 漸化有限要素法による曲り梁の解析

株式会社オリエンタルコンサルタンツ 正員 ○武長憲二
信州大学 〃 谷本勉之助
〃 〃 夏目正太郎
〃 〃 浜野浩幹

I. 漸化有限要素法について.

一般に構造物は，ある一定の基本的な図形要素（これを単位構と名付ける）の集合体より成り立っていると考えられる。これら単位構の間の力学条件を行列演算により解析しようというのが本法の基礎をなす演算子法である。本漸化有限要素法というのは，上記演算子法に更に有限要素法の思想を取り入れ解析の簡素化を図るものである。即ち，ある複雑な構成を持つ構造物，例えば曲線あるいは曲面で構成されるようなものの解析に際して，それを有限個の要素（一般に直線あるいは平面要素）の集合体と見なし，各要素を上記単位構と考える。これら単位構の力学性状を基礎微分方程式の一般解で示し，この積分常数群（これを単位構の固有マトリクスと呼ぶ）を未知数にとる。次に単位構間の結合条件（適合条件と平衡条件）によって各固有マトリクスを漸化式で結び，一つの単位構の固有マトリクスを全要素に対して汎通させる。最後に境界条件でこの固有マトリクスを定めれば解が得られる。 以下に本法を用いた弾性床上の曲り梁の解析を一例として示す。

II. 弾性床上の曲り梁の解析

1. 基本式

有限個に分割された曲り梁の要素は，曲げとねじれの挙動を示し，次の微分方程式に支配される。

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{k}{EI} w \quad , \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad , \quad (k\,;\,\text{Winkler常数}). \tag{1}$$

ここに弾性床からの反力としてはWinkler反力を仮定した。これらより次の基本式を得る。

$$\mathbb{W}(\rho) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ w \\ M \\ T \\ S \end{bmatrix}_\rho = \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{GJ} & & & & & \\ & \frac{\ell^2}{2\beta^2 EI} & & & & \\ & & \frac{\ell^3}{2\beta^3 EI} & & & \\ & & & -\frac{\ell}{\beta} & & \\ & & & & \ell & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta\rho}(\cos\beta\rho-\sin\beta\rho) & e^{\beta\rho}(\cos\beta\rho+\sin\beta\rho) & -e^{-\beta\rho}(\cos\beta\rho+\sin\beta\rho) & e^{-\beta\rho}(\cos\beta\rho-\sin\beta\rho) \\ 0 & 0 & e^{\beta\rho}\cos\beta\rho & e^{\beta\rho}\sin\beta\rho & e^{-\beta\rho}\cos\beta\rho & e^{-\beta\rho}\sin\beta\rho \\ 0 & 0 & -e^{\beta\rho}\sin\beta\rho & e^{\beta\rho}\cos\beta\rho & e^{-\beta\rho}\sin\beta\rho & -e^{-\beta\rho}\cos\beta\rho \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\beta\rho}(\cos\beta\rho+\sin\beta\rho) & e^{\beta\rho}(\cos\beta\rho-\sin\beta\rho) & e^{-\beta\rho}(\cos\beta\rho-\sin\beta\rho) & e^{-\beta\rho}(\cos\beta\rho+\sin\beta\rho) \end{bmatrix} [\mathbb{X}+\mathbb{K}(\rho)]. \tag{2}$$

又は，

$$\mathbb{W}(\rho) = \mathbb{P}(\rho)[\mathbb{X}+\mathbb{K}(\rho)] \tag{3}$$

ここに， ϕ；ねじれ角，θ；たわみ角，w；たわみ，M；曲げモーメント，T；ねじりモーメント，S；セン断力，GJ；ねじれ剛度，EI；曲げ剛度，ℓ；要素長，$\rho = x/\ell$，(x；要素の座標変数)，$\beta = \sqrt[4]{k\ell^4/(4EI)}$，$\mathbb{X} = \{a\ b\ c\ d\ e\ f\}$；固有マトリクス，$\mathbb{K}(\rho)$；$\rho$点の荷重マトリクス.

2. 荷重項

荷重作用点での連続条件より求める。荷重の影響は，載荷点を越える毎に，その荷重に対応する荷重マトリクスを固有マトリクスに加えるだけで処理できる。

3. 要素の結合及び漸化処理.

分割各要素はある角度をもって結合されているので、物理量の結合に際しては、系全体を考慮した一座標を考え，それに射影した後に結合する。 かくして隣接2要素の物理量の間に漸化式を得る。

$$\mathbb{R}_r \mathbb{W}_r(0) = \mathbb{R}_{r-1} \mathbb{W}_{r-1}(1) \quad , \quad (\mathbb{R}\,;\text{射影マトリクス}). \qquad (4)$$

ここで，上(4)式に前(3)式を適用すれば 固有マトリクスに関する漸化式が得られる。

$$\mathbb{X}_r = \mathbb{L}_r \mathbb{X}_{r-1} + \mathbb{T}_r \mathbb{K}_{r-1} \quad , \quad (\mathbb{L}_r\,;\text{移行子},\ \mathbb{T}_r\,;\text{補給子}). \qquad (5)$$

上(5)式によって全要素の固有マトリクスは，6つの未知要素から成る第一要素の固有マトリクスで示される。

4. 境界条件

境界条件は次式で与えられる。

$$\mathbb{B}\mathbb{X}_1 = 0 , \quad \mathbb{B}'(\mathbb{X} + \mathbb{K})_n = 0 . \qquad (6)$$

ここに，$\mathbb{X}_1$，$\mathbb{X}_n$ は各々第一要素，最終要素の固有マトリクス，$\mathbb{B}$，$\mathbb{B}'$は両端支持条件によって定まる3行6列の境界マトリクスである。

5. 最終式

前述の如く求めるべき第一要素固有マトリクスは未知数6，境界条件式も6本，従って(6)式より汎通固有マトリクスを定めることができる。 即ち，

$$\mathbb{X}_1 = -\begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{B}'\mathbb{S}_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{B}'\mathbb{F}_n \quad \mathbb{B}' \end{bmatrix} \{\mathbb{K}\}_n , \quad (\mathbb{S}_n\,;\text{集積移行子},\ \mathbb{F}_n\,;\text{集積補給子},\ \{\mathbb{K}\}_n\,;\text{集積荷重項}) \qquad (7)$$

上(7)式を(5)式に代入し全要素の固有マトリクスを定め，(2)式に代入すれば物理量が得られ，解に至る。

6. 計算例.

両端自由の弾性床上円弧曲り梁図-(a)を，図-(b)の如く考えて解析した。諸数値は， 半径20^m，中心角60°，$E=2.1\times10^6\ t/m^2$，$A=0.09\,m^2$，$I=0.000675\,m^4$，$G=8.4\times10^6\ t/m^2$，$J=0.001139\,m^4$，$P=10^t$である。 結果は64分割で表-1 分割数による収斂度は表-2に示す。

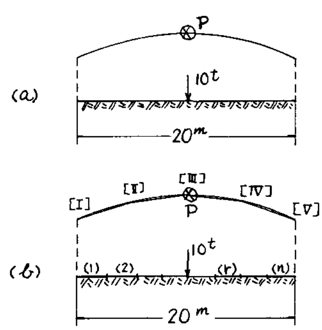

表-1

物理量／点	$\phi\,(\times10^{-4})$	$\theta\,(\times10^{-4})$	$w\,(\times10^{-4})$	M	T	S
[I]	0.719	0.094	0.186	0	0	0
[II]	0.898	0.394	-1.270	-0.073	0.004	-0.154
[III]	-3.098	0	31.214	3.765	0	5.000 (-5.000)

表-2

分割数	[III]点$w\,(\times10^{-3})$
16	3.106
32	3.121
64	3.121

(註)．上例題は対称系であるので，表-1には系の左半分の値のみ示した。

7. 総括.

例題では，等断面円弧曲り梁をあつかったが，本法によれば，変断面，変質，任意形状の曲り梁も全く同手順で容易に解析し得る。 又，静定，不静定などという概念や複雑な積分計算を必要とせず，加えて，漸化方式をとる事により多元連立方程式を解く煩雑さから解放されるので演算は実に容易である。 表-2に示す如く，分割数増加により目的に合致した精度を得ることができる。従って曲線構造を含む系の解析に本法を適用する事は妥当であり又，多いに有効であると思われる。