

Membrane Action を有する矩形板, およびリブ付き板 の3次元的弾塑性解析法

大阪工業大学 正員 岡村宏一

1 序 薄肉構造を立体的に考察すると, 多くの場合ある広がりを持つ薄板, 帯板, はり等の構造要素の結合によって形成されており又, 断面の構成上, 一般に偏心補剛の要素を多く含んでいる。しかし, この様な要素の厳密な *Plastic Criteria* は目下のところ充分究明されていないように思はれる。特に, 薄板の要素は他の構造要素との合成によって曲げならびに *Scheibe action* が連成した複雑な応力状態にあるが, 面外の変形の増大に伴い更に *membrane action* を誘発する。このような板要素の塑性域の拡大は板厚の方向に一定でなく, 図-1の簡単なスケッチに示すように構造各部の塑性域は3次元的に発展し, ひずみ経路によっては除荷域, 再負荷域を生じ得る。このような弾塑性状態の移行は, 場合により座屈等の不安定現象への転移にも影響を与える。従来, *Membrane action* をもつ矩形板の曲げについては非線形弾性領域ではかなり

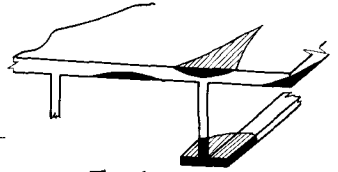


図-1

研究されている。例えば, A.K. Basu, J.C. Chapman 等は *Corrugate* 板も含め *Von Kármán Type* の基礎式に基づき初期たわみ, 境界変動条件も考慮して詳細に論じた⁽¹⁾(1966)。一方, この種の板の弾塑性領域についての研究は僅少である。Ch. Massonnet はこの問題に関して塑性流れの条件を用いた一般的な理論を提示したが⁽²⁾(1968),⁽²⁾ 彼はその解析の基本的仮定において断面が塑性化する場合, 突然 *fully Plastic* になるとした。これは本質的に理想化された *sandwich* 板構造を仮想したものであり, P.G. Hodge, Y.N. Rabotnov, V.I. Rozenblum 等が *shell* 構造の解析に用いた基本的概念と全概である。本文は, この種の板の既述のような塑性域の3次元的拡大に対応出来るような解法を提示するとともに, 更に実際構造にみられるような板と他の構造要素が完全合成される場合(例えば, リブ付き板等)に対する解法の拡張に解れ。現在の計算機能力による制約もあるが薄肉板構造の3次元的弾塑性解析への応用の可能性を示唆するものである。

2. 解法の概要と基本的仮定 解法の基本的な方法は一枚の板を図-2に示すような若干の分割された薄層で合成されたものと見做すことにある。この方法では板内の塑性域の拡大の模範は各層毎に検証され又, 合成の方法と他の部材との結合に拡張することも出来る。次に本解法に於ける基本的仮定を列挙しよう。

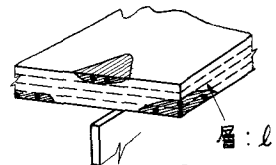


図-2

- 1) 構造材料は弾完全塑性体とする。
- 2) 弾性歪増分は応力増分と *Hooke* の法則で結はれる。塑性歪増分と応力の関係は降伏条件と塑性ポテンシャルとして塑性流動条件を適用出来る。この条件と *Reuss* の条件との全義性により応力-歪関係は, *Plandtl-Reuss* の方程式と全義の関係に支配される。
- 3) 変形は平板の変形前の中央面に垂直な要素が直線を保ち, かつ変形後の中央面に垂直である。
- 4) 分割された薄層内の任意の点で塑性域にある場合, この層のこの部分は *fully Plastic* である。それ以外の状態ではこの部分は弾性経路上にある。

3. 層分割された板(薄層)の基礎式 図-3に示す分割された厚さ t の薄板の微小エレメントのたわみと w とし、上面に作用する鉛直力ならびに x, y 各方向の水平せん断力の強度を夫々 q_0, S_{0x}, S_{0y} とし全板に下面に作用するそれらを q_u, S_{ux}, S_{uy} とすれば、図-3(a)に示される曲げ、および図-3(b)に示されるScheibe-actionの釣り合いならびにmembrane actionを考慮して

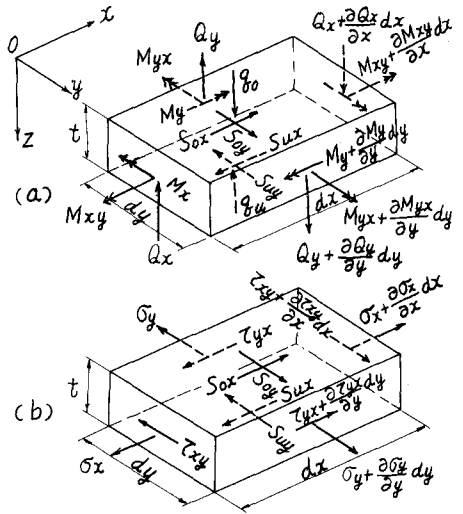


図-3

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q_0 + q_u - \left\{ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (S_{ux} - S_{0x}) \frac{\partial w}{\partial x} + (S_{uy} - S_{0y}) \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \quad (1)$$

$$Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{t}{2} (S_{0x} + S_{ux}) = 0 \quad (2)$$

$$Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{t}{2} (S_{0y} + S_{uy}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = S_{ux} - S_{0x} \quad (4) \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = S_{uy} - S_{0y} \quad (5)$$

たゞし、 $N_x = t\sigma_x, N_y = t\sigma_y, N_{xy} = N_{yx} = t\tau_{xy}$ である。(1),(2),(3)の各式から

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q_0 + q_u - \left\{ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (S_{ux} - S_{0x}) \frac{\partial w}{\partial x} + (S_{uy} - S_{0y}) \frac{\partial w}{\partial y} \right\} + \frac{t}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (S_{0x} + S_{ux}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{0y} + S_{uy}) \right\} \quad (6)$$

適合条件は $\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ (7) である。

(6),(7)の両式を Kinematical time について微分すれば、

$$\frac{\partial^2 \dot{M}_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \dot{M}_y}{\partial y^2} = -\dot{q}_0 + \dot{q}_u - \left\{ \dot{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\dot{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} + (\dot{S}_{ux} - \dot{S}_{0x}) \frac{\partial w}{\partial x} + (\dot{S}_{uy} - \dot{S}_{0y}) \frac{\partial w}{\partial y} + (S_{ux} - S_{0x}) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + (S_{uy} - S_{0y}) \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right\} + \frac{t}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\dot{S}_{0x} + \dot{S}_{ux}) + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{S}_{0y} + \dot{S}_{uy}) \right\} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \quad (9)$$

次に, Massonnet が彼の論文^[2]で示したように塑性流れの条件および Hooke の法則の時間微分により弾塑性時の薄層の中央面に於ける歪, ならびに曲率の component を表示すれば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \dot{\epsilon}_x^e + \dot{\epsilon}_x^p = \frac{1}{Et} (\dot{N}_x - \nu \dot{N}_y) + t\mu \frac{\partial f}{\partial N_x} \\ \dot{\epsilon}_y &= \dot{\epsilon}_y^e + \dot{\epsilon}_y^p = \frac{1}{Et} (\dot{N}_y - \nu \dot{N}_x) + t\mu \frac{\partial f}{\partial N_y} \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\epsilon}_{xy}^e + \dot{\epsilon}_{xy}^p = \frac{2(1+\nu)}{Et} \dot{N}_{xy} + t\mu \frac{\partial f}{\partial N_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (10) \quad \left. \begin{aligned} \dot{\chi}_x &= -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} = \dot{\chi}_x^e + \dot{\chi}_x^p = \dot{\chi}_x^e + \mu \frac{\partial f}{\partial M_x} \\ \dot{\chi}_y &= -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} = \dot{\chi}_y^e + \dot{\chi}_y^p = \dot{\chi}_y^e + \mu \frac{\partial f}{\partial M_y} \\ \dot{\chi}_{xy} &= \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} = \dot{\chi}_{xy}^e + \dot{\chi}_{xy}^p = \dot{\chi}_{xy}^e + \mu \frac{\partial f}{\partial M_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{又 (11) より} \quad \left. \begin{aligned} \dot{M}_x &= -D \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) - D\mu \left(\frac{\partial f}{\partial M_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial M_y} \right), \quad \dot{M}_y = -D \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) - D\mu \left(\frac{\partial f}{\partial M_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial M_x} \right) \\ \dot{M}_{xy} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} - D(1-\nu) \mu \frac{\partial f}{\partial M_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (12) \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

たゞし、 f : 中央面に於ける塑性ポテンシヤル。 μ : 塑性変形中変化する intensity である。さらに (4x5)に適合するような Stress Function $\phi(x,y)$ を導入して面内力を定義すれば、

$$N_x = t \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \int S_{ux} dx - \int S_{0x} dx + C, \quad N_y = t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \int S_{uy} dy - \int S_{0y} dy + C', \quad N_{xy} = -t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

$$\text{又, } \dot{N}_x = t \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} + \int \dot{S}_{ux} dx - \int \dot{S}_{0x} dx + \dot{C}, \quad \dot{N}_y = t \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} + \int \dot{S}_{uy} dy - \int \dot{S}_{0y} dy + \dot{C}', \quad \dot{N}_{xy} = -t \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x \partial y} \quad (14)$$

C, C' は本題のような場合一般に 0 である。(10),(12),(13),(14)を(8x9)の両式に代入し時間積分 $\int_0^t$ を遂行するこ

とにより分割された薄層(l)の微小エレメントに関する次の非線形の基礎式を得る。

$$D_k(44w) = g_0^l - g_u^l + t_k \left\{ \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} + \left(\int S_{ux}^l dx - \int S_{ox}^l dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + \left(\int S_{uy}^l dy - \int S_{oy}^l dy \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (S_{ux}^l - S_{ox}^l) \frac{\partial w}{\partial x} + (S_{uy}^l - S_{oy}^l) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{t_k}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (S_{ox}^l + S_{ux}^l) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{oy}^l + S_{uy}^l) \right\} \\ - D_k \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \mu^l \left(\frac{\partial f_2}{\partial M_x^l} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial M_y^l} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \mu^l \left(\frac{\partial f_2}{\partial M_y^l} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial M_x^l} \right) \right\} - 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\mu^l \frac{\partial f_2}{\partial M_{xy}^l} \right) \right] dt \quad (15)$$

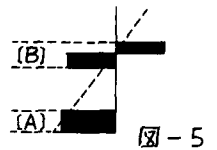
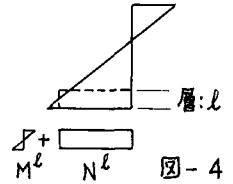
$$\Delta \Delta \phi_k = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{t_k} \left\{ \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (S_{ux}^l - S_{ox}^l) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{uy}^l - S_{oy}^l) \right\} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int S_{ux}^l dx - \int S_{ox}^l dx \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int S_{uy}^l dy - \int S_{oy}^l dy \right) \right\} - E t_k \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\mu^l \frac{\partial f_2}{\partial N_x^l} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mu^l \frac{\partial f_2}{\partial N_y^l} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\mu^l \frac{\partial f_2}{\partial N_{xy}^l} \right) \right] dt \right\} \quad (16)$$

式中, index l は薄層(l)に関するものであることを示す。

$$\left. \begin{aligned} \text{又, } E_x^l &= \frac{1}{E t_k} (N_x^l - \nu N_y^l) + t_k \int_0^t \mu^l \frac{\partial f_2}{\partial N_x^l} dt \\ E_y^l &= \frac{1}{E t_k} (N_y^l - \nu N_x^l) + t_k \int_0^t \mu^l \frac{\partial f_2}{\partial N_y^l} dt \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E t_k} N_{xy}^l + t_k \int_0^t \mu^l \frac{\partial f_2}{\partial N_{xy}^l} dt \end{aligned} \right\} \quad (17) \quad \left. \begin{aligned} M_x^l &= -D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D_k \int_0^t \mu^l \left(\frac{\partial f_2}{\partial M_x^l} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial M_y^l} \right) dt \\ M_y^l &= -D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - D_k \int_0^t \mu^l \left(\frac{\partial f_2}{\partial M_y^l} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial M_x^l} \right) dt \\ M_{xy}^l &= D_k (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D_k (1-\nu) \int_0^t \mu^l \frac{\partial f_2}{\partial M_{xy}^l} dt \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式中, 積分項は塑性変形の影響を表はし, その時間積分は荷重段階の和の形に置換される。

4. 薄層の降伏条件: 先づ図-3に示される弾性状態の応力分布の場合の分割された薄層(l)の1方向の断面力(モーメント M^l , 軸力 N^l)の組合わせについて考察しよう。一般に分割された層厚を充分薄くするに従いこの層内応力分布は2次元応力分布に漸近するが, 計算上の制約から層の分割数をあまり大きくすることは出来ない。しかし, ひずみ全路上で中立面を含まない各層, すなわち断面の抵抗容量の殆んどを保有する部分が塑性化する場合, これら各層でモーメント M^l の影響を無視して平均的な2次元応力状態の yield locus を用いても差支えないと考える。従つて, これらの層の降伏条件式は



[A] von Mises の Plastic criterion にもとづき

$$(n_x^l)^2 + (n_y^l)^2 - n_x^l n_y^l + 3(n_{xy}^l)^2 = 1 \quad (19)$$

ただし, $n_x^l = N_x^l / N_P^l$, $n_y^l = N_y^l / N_P^l$, $n_{xy}^l = N_{xy}^l / N_P^l$, $N_P^l = \sigma_P t_k$, σ_P : 降伏応力。

このような近似化は D.C. Drucker, R.T. Shield が toroidal shell の全断面降伏に対して用いた近似法と類似の考察をこの薄層(l)の降伏に及ぼしたことになる。次に, 中立面を含んだ状態の層では応力の反転が考えられる。ここでは実際の yield hypersurface $F(M, N) = \text{const.}$ と2つの hypersurface に置換する。すなわち, yield locus に関する限り曲げと membrane action の相互の影響を分離する。この近似化は, 例えば P.G. Hodge, A.A. Il'yushin, V.I. Rosenblum, G.S. Shapino 等が各種の問題に対して用いたのと類似の手法をこの薄層の降伏条件に用いることになる。

[B] 中立面を含んだ状態の層の降伏条件式は以上の考察から,

$$(n_x^l)^2 + (n_y^l)^2 - n_x^l n_y^l + 3(n_{xy}^l)^2 + (m_x^l)^2 + (m_y^l)^2 - (m_x^l)(m_y^l) + 3(m_{xy}^l)^2 = 1 \quad (20)$$

ただし, $m_x^l = M_x^l / M_P^l$, $m_y^l = M_y^l / M_P^l$, $m_{xy}^l = M_{xy}^l / M_P^l$, $M_P^l = \frac{1}{4} \sigma_P t_k^2$

以上の降伏条件を塑性ポテンシャルとすると, 前出の各式の塑性変形に関する項の各微分商は,

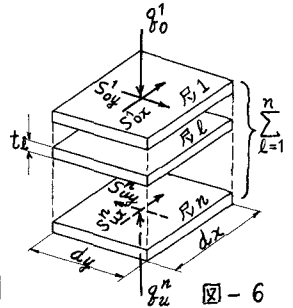
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial N_x^l} &= (2N_x^l - N_y^l)(N_P^l)^{-2} & \frac{\partial f_2}{\partial N_y^l} &= (2N_y^l - N_x^l)(N_P^l)^{-2} & \frac{\partial f_2}{\partial N_{xy}^l} &= 6N_{xy}^l (N_P^l)^{-2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M_x^l} &= (2M_x^l - M_y^l)(M_P^l)^{-2} & \frac{\partial f_2}{\partial M_y^l} &= (2M_y^l - M_x^l)(M_P^l)^{-2} & \frac{\partial f_2}{\partial M_{xy}^l} &= 6M_{xy}^l (N_P^l)^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

5. 合成された板(以下単に板と呼ぶ)の基礎式 前節3で示した夫々に異なった弾塑性状態にある薄層は合成条件により合成されて一枚の板に還元される。板の基礎式は次のように与えられる。

1) 釣合条件式 図-6を参照し、薄層 l の基礎式(5), および降伏条件。

層間内力の釣合いを考慮して次のように書ける。

$$\sum_j (D_j + D_i)(\Delta \Delta w) = q_0' - q_n' + \sum_k t_k \left[\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (S_{ox}^l + S_{ux}^l) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{oy}^l + S_{uy}^l) \right\} \right] - \left(\int S_{ux}^l dx - \int S_{ox}^l dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\int S_{uy}^l dy - \int S_{oy}^l dy \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ + (S_{ux}^l - S_{ox}^l) \frac{\partial w}{\partial x} + (S_{uy}^l - S_{oy}^l) \frac{\partial w}{\partial y} - D_i (M_p)^2 \sum_k \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \mu_k^i (N_x^i) \right\} \right. \\ \left. - \nu_2 M_y^i \right]_k + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \mu_k^i (N_y^i) \right\} - \nu_2 M_x^i \right]_k - 12 \nu_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \mu_k^i (M_{xy}^i) \right\} \quad (22)$$



ただし, j : 弾性域にある層, i : 中立面を含む層, k : 荷重段階, $\sum_k$ は層が塑性域にある場合のみに累加される。 μ_k : 荷重段階 k に於ける塑性変形の intensity, $\nu_1 = 2 - \nu$, $\nu_2 = 1 - 2\nu$, $\nu_3 = 1 - \nu$ 。

2) 適合条件式 各層毎に, 前述の降伏条件を考慮し(16)は次のように書かれる。

$$\Delta \Delta \phi_l = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{t_l} \left[\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (S_{ux}^l - S_{ox}^l) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{uy}^l - S_{oy}^l) \right\} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int S_{ux}^l dx - \int S_{ox}^l dx \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int S_{uy}^l dy - \int S_{oy}^l dy \right) \right\} - E t_l (N_p)^2 \sum_k \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \mu_k^l (2N_x^l + N_y^l) \right\} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \mu_k^l (2N_y^l + N_x^l) \right\} \right] - b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \mu_k^l (N_{xy}^l) \right\} \right] \quad (23)$$

3) 合成条件式 合成条件は基本的仮定3)を考慮し, $l-1$ 層の下面の歪($\epsilon_{ux}^{l-1}, \epsilon_{uy}^{l-1}$)と l 層の上面歪($\epsilon_{ox}^l, \epsilon_{oy}^l$)の適合条件として次のように得られる。この際, 層間せん断力の釣合も全時に考慮される。

$$\frac{1}{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\phi_l - \phi_{l-1}) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\phi_l - \phi_{l-1}) \right\} + \frac{1}{E t_l} \left[\int S_{ux}^l dx - \left(1 + \frac{t_l}{t_{l-1}} \right) \int S_{ux}^{l-1} dx + \frac{t_l}{t_{l-1}} \int S_{ox}^{l-1} dx - \nu \left\{ \int S_{uy}^l dy \right. \right. \\ \left. \left. - \left(1 + \frac{t_l}{t_{l-1}} \right) \int S_{uy}^{l-1} dy + \frac{t_l}{t_{l-1}} \int S_{oy}^{l-1} dy \right\} + t_l \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_{l-1}}{t_l} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_k (N_p)^2 \left\{ \mu_k^l (2N_x^l - N_y^l) \right\}_k - \left(\frac{t_{l-1}}{t_l} \right)^3 \mu_k^{l-1} (2N_x^{l-1} - N_y^{l-1})_k \right] \right] \quad (24)$$

$$\frac{1}{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\phi_l - \phi_{l-1}) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\phi_l - \phi_{l-1}) \right\} + \frac{1}{E t_l} \left[\int S_{uy}^l dy - \left(1 + \frac{t_l}{t_{l-1}} \right) \int S_{uy}^{l-1} dy + \frac{t_l}{t_{l-1}} \int S_{oy}^{l-1} dy - \nu \left\{ \int S_{ox}^l dx \right. \right. \\ \left. \left. - \left(1 + \frac{t_l}{t_{l-1}} \right) \int S_{ox}^{l-1} dx + \frac{t_l}{t_{l-1}} \int S_{ox}^{l-1} dx \right\} + t_l \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_{l-1}}{t_l} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum_k (N_p)^2 \left\{ \mu_k^l (2N_y^l - N_x^l) \right\}_k - \left(\frac{t_{l-1}}{t_l} \right)^3 \mu_k^{l-1} (2N_y^{l-1} - N_x^{l-1})_k \right] \right] \quad (25)$$

4) 塑性変形の Intensity μ_k を定める条件式 板内の各層内の塑性域にある各点のある荷重段階 k に対応する μ_k はこれらの各点の塑性ポテンシャルが式(19)又は(20)を満足することを要求する連立方程式により求まる。この条件式は Ch. Massonnet の方法を拡張して線形化出来るがこのでは割愛する。

6. 他の構造要素との合成条件 本文に示すような弾塑性板が例えばリブ付き板のように弾塑性はりとは合成する場合について簡単に述べる。合成条件を与える方法として筆者が既に他の問題に用いた方法^[3]を拡張して上述のような弾塑性板とはりとの合成の問題に應用する。詳細は省略する。

7. 数値計算について 5節で述べた基礎式は biharmonic operator を含め差分和分形に書き換えられる。連立非線形方程式の iteration は Basu ならびに Chapman が板の非線形弾性問題に用いた方法を拡大して利用出来る。塑性変形に関する附加項の演算には前述のように Ch. Massonnet の方法が適用出来る。本解法の演算は大容量である。プログラム, 解の収束等に関する検討は今後の課題とし本文では membrane action をもつ平板構造の3次元弾塑性解析のための理論を提示するに止める。

[1] Basu, Chapman; Large Deflection Behaviour of Transversely Loaded Rectangular Orthotropic Plates; Proc. of Institution of Civil Eng., 1966. [2] Ch. Massonnet; General Theory of Elasto-Plastic Membrane-Plates, International Conference on the application of plastic theory in engineering design, 1968. [3] 岡村, 板とBeam系の合成構造の立体解析法, ならびに板と格子桁の合成による橋梁解析への応用, 土木学会, 1968.