

九州大学工学部 正 員 山崎徳也

宮崎大学工学部 正 員 太田俊昭

九州大学工学部 学生員 ○坂本紘二

1. 序

過面外荷重を受ける平板の曲げに関する研究には *Simple Plastic Theory* に基づくものが多いが、弾塑性問題を扱った例は極めて少なく、僅かに *Bhaumik and Hanley*¹⁾, *Arg and Lopez*²⁾, 横尾・中村・森氏³⁾らの塑性域の二次元的な広がりも考慮した、いわゆる弾・塑性解析に関する研究が見受けられるに過ぎない。本論文は、これらの既往研究とは異なり、板厚方向の塑性域の変化をも考慮した厳密な意味での弾塑性解析理論の確立を試みたもので、その第1段階として材料の完全塑性体を仮定し、*Mises* の降伏条件のもとに弾性および塑性域での応力とひずみを自動的に決定しうるサブプログラムを開発し、これを用いて差分法による単純支持正方形板の弾塑性解析を行ったものである。

2. 基礎方程式

板厚を h 、曲率を ϕ とし、直交座標 (x, y, z) を図-1 に示すごとく定め、上、下縁の垂直ひずみおよびせん断ひずみをそれぞれ ϵ_{xz} , ϵ_{yz} および γ_{xy} で表わせば、平面保持の仮定により、ひずみ分布は一般に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z\phi_x + \epsilon_{xz} \\ \epsilon_y &= -z\phi_y + \epsilon_{yz} \\ \gamma_{xy} &= -z\phi_{xy} + \gamma_{xyt} \end{aligned} \right\} \text{-----}(1)$$

ただし、 ϵ_i : i 軸方向の垂直ひずみ、 ϵ_{iit} : i 軸方向の上、下縁の垂直ひずみ、 $\phi_x, \phi_y, \phi_{xy}$: 曲率。

図-1 より $\epsilon_x = h\phi/2$ とするゆえ、式(1) は次のごとく書き換えられる。

$$\epsilon_x = \left(\frac{h}{2} - z\right)\phi_x, \quad \epsilon_y = \left(\frac{h}{2} - z\right)\phi_y, \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{h}{2} - z\right)\phi_{xy} \text{-----}(2)$$

一方、板内部に生ずる x, y 軸方向の垂直応力 σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xy} は弾性ならびに塑性応力状態の如何を問わず、ひずみ ϵ, γ を用いて次のごとく一般表示される。

$$\sigma_x = \mu_x \epsilon_x + \lambda_x \epsilon_y, \quad \sigma_y = \mu_y \epsilon_y + \lambda_y \epsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu_{xy} \gamma_{xy} \text{-----}(3)$$

ただし、式(3)の係数 $\mu_x, \lambda_x, \dots, \mu_{xy}$ は、文献(4)より弾性および塑性応力状態でそれぞれ次に示すごとき内容となる。

$$\left. \begin{aligned} \text{弾性応力状態:} \quad \mu_x &= \frac{2G}{1-\nu}, & \lambda_x &= \frac{2G\nu}{1-\nu}, \\ \mu_y &= \frac{2G}{1-\nu}, & \lambda_y &= \frac{2G\nu}{1-\nu}, \\ \mu_{xy} &= 2G \end{aligned} \right\} \text{-----}(4)$$

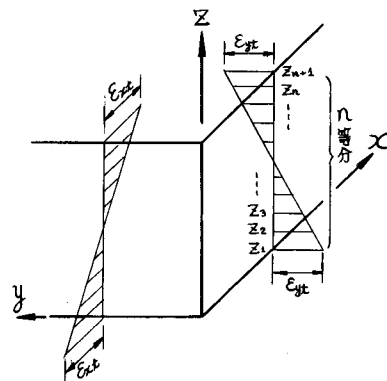


図-1

ただし、 G :せん断弾性係数、 ν :ポアソン比

$$\left. \begin{aligned} \text{塑性応力状態: } \mu_x &= \frac{2K}{E}, \quad \lambda_x = \frac{K}{E}, \\ \mu_y &= \frac{2K}{E}, \quad \lambda_y = \frac{K}{E}, \quad \mu_{xy} = \frac{K}{E} \end{aligned} \right\} \text{-----}(5)$$

ただし、 $K = \sigma_y / \sqrt{3}$, σ_y :降伏応力, $E = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}$

また、弾性および塑性応力状態の判別式には次のMisesの降伏条件式を用いればよい。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \text{弾性応力状態: } \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 &< \sigma_y^2 \\ \text{塑性応力状態: } \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 &= \sigma_y^2 \end{aligned} \right\} \text{-----}(6)$$

式(2),(3)より、応力と曲率の関係が次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \mu_x \left(\frac{\kappa}{2} - Z \right) \phi_x + \lambda_x \left(\frac{\kappa}{2} - Z \right) \phi_y, \\ \sigma_y &= \mu_y \left(\frac{\kappa}{2} - Z \right) \phi_y + \lambda_y \left(\frac{\kappa}{2} - Z \right) \phi_x, \\ \tau_{xy} &= \mu_{xy} \left(\frac{\kappa}{2} - Z \right) \phi_{xy} \end{aligned} \right\} \text{-----}(7)$$

さて、断面に作用する曲げおよびねじりモーメントは、それぞれ次の一般式で与えられる。

$$M_x = - \int_0^h \sigma_x Z dZ, \quad M_y = - \int_0^h \sigma_y Z dZ, \quad M_{xy} = - \int_0^h \tau_{xy} Z dZ \text{-----}(8)$$

ここで、板の断面を n 等分し、分割線 j の Z 座標を Z_j 、その線上の応力成分をそれぞれ σ_x^j , σ_y^j および τ_{xy}^j ($j=1, 2, \dots, n+1$) で表わせば、式(8)は下記のごとく変形される(図-1参照)。すなわち、まず式(8)の第1式より、

$$M_x = - \sum_{j=1}^n \left\{ (Z_{j+1} - Z_j) \frac{\sigma_x^j + \sigma_x^{j+1}}{2} \right\} \left\{ Z_j + \frac{(Z_{j+1} - Z_j)(\sigma_x^j + 2\sigma_x^{j+1})}{3(\sigma_x^j + \sigma_x^{j+1})} \right\} \text{-----}(9)$$

式(9)に式(7)を代入して整理すれば、

$$M_x = - \sum_{j=1}^n \frac{\Delta h}{6} \left\{ \left[\mu_x^j (3Z_j + \Delta h) \left(\frac{1}{2} - Z_j \right) + \mu_x^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(\frac{1}{2} - Z_{j+1} \right) \right] \phi_x \right. \\ \left. + \left[\lambda_x^j (3Z_j + \Delta h) \left(\frac{1}{2} - Z_j \right) + \lambda_x^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(\frac{1}{2} - Z_{j+1} \right) \right] \phi_y \right\}$$

ただし、 $\Delta h = h/n$, μ_x^j, λ_x^j は分割線上の μ_x および λ_x の値。

さらに、上式を簡略表示すれば、結局次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= T(a_1 \phi_x + b_1 \phi_y) \\ \text{同様に、} M_y &= T(a_2 \phi_y + b_2 \phi_x), \quad M_{xy} = T \cdot a_3 \phi_{xy} \end{aligned} \right\} \text{-----}(10)$$

ここに、 $T = \Delta h/6$,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sum_{j=1}^n \left\{ \mu_x^j (3Z_j + \Delta h) \left(Z_j - \frac{1}{2} \right) + \mu_x^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(Z_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad b_1 = \sum_{j=1}^n \left\{ \lambda_x^j (3Z_j + \Delta h) \left(Z_j - \frac{1}{2} \right) + \lambda_x^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(Z_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ a_2 &= \sum_{j=1}^n \left\{ \mu_y^j (3Z_j + \Delta h) \left(Z_j - \frac{1}{2} \right) + \mu_y^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(Z_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad b_2 = \sum_{j=1}^n \left\{ \lambda_y^j (3Z_j + \Delta h) \left(Z_j - \frac{1}{2} \right) + \lambda_y^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(Z_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ a_3 &= \sum_{j=1}^n \left\{ \mu_{xy}^j (3Z_j + \Delta h) \left(Z_j - \frac{1}{2} \right) + \mu_{xy}^{j+1} (3Z_j + 2\Delta h) \left(Z_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \text{-----}(11)$$

一方、等分布荷重 p が作用する板の平衡方程式は周知の次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \text{-----}(12)$$

式(12)に式(10)を代入すれば、

$$a_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + a_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + b_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{p}{T} = 0 \quad \text{----- (13)}$$

曲率 ϕ_x , ϕ_y および ϕ_{xy} は、 $-z$ 方向の板のたわみ w により、次式で表わされる。

$$\phi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \phi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \phi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{----- (14)}$$

式(13)に式(14)を代入して整理すれば、結局たわみ w に関する次の平衡方程式をうる。

$$A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{T} \quad \text{----- (15)}$$

ただし、 $A = a_1$, $B = b_1 + b_2 + 2a_3$, $C = a_2$

3. 解法

弾塑性曲げ問題に式(15)を適用可能にするには、次のごとく差分方程式に変換しなければならない。すなわち、対象とする平板を長さ Δ の差分間隔で等分割し、任意格子点 k の周辺の格子点を図-2に示す記号で表わせば、式(15)は次のごとく書き換えられる。

$$A_k \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^4} + B_k \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^2 \Delta y^2} + C_k \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta y^4} = \frac{p_k}{T} \quad \text{----- (16)}$$

式(16)の左辺の各項を差分式に置き換えて整理すれば、結局次式をうる。

$$\begin{aligned} & A_k (w_{k+2} - 4w_{k+1} + 6w_k - 4w_{k-1} + w_{k-2}) \\ & + B_k \{ w_{k+1} + w_{k-1} - 2(w_{k+1} + w_{k-1}) + 4w_k - 2(w_k + w_k) + w_{k-1} + w_{k-1} \} \\ & + C_k (w_m - 4w_k + 6w_k - 4w_k + w_k) \\ & = D_k w_k + E_k (w_{k+1} + w_{k-1}) + F_k (w_k + w_k) + B_k (w_{k+1} + w_{k-1} + w_{k-1} + w_{k-1}) \\ & + A_k (w_{k+2} + w_{k-2}) + C_k (w_m + w_k) = \frac{p_k \Delta^2}{T} \quad \text{----- (17)} \end{aligned}$$

ただし、 $D_k = 6A_k + 4B_k + 6C_k$, $E_k = -(4A_k + 2B_k)$, $F_k = -(2B_k + 4C_k)$

また、式(14)の曲率 ϕ_x , ϕ_y および ϕ_{xy} も、たわみ w を用いて次のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_x^k &= -\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} = -\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta^2} \\ \phi_y^k &= -\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} = -\frac{w_k - 2w_k + w_k}{\Delta^2} \\ \phi_{xy}^k &= -\frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x \Delta y} = -\frac{w_{k+1} - w_{k-1} - w_{k+1} + w_{k-1}}{4\Delta^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (18)}$$

いま、例として単純支持正方形板を採用すれば、周辺での境界条件は、格子点 k が y 軸に平行な支持辺にある場合は、 $w_k = 0$, $\frac{\partial w_k}{\partial y} = 0$, および $\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0$ となるゆえ、次の関係式が成立する。

$$w_{k+1} = -w_{k-1}, \quad w_{k+1} = -w_{k-1}, \quad w_{k+1} = -w_{k-1} \quad \text{--- (19)}$$

格子点 k が x 軸に平行な支持辺にある場合も同様に、

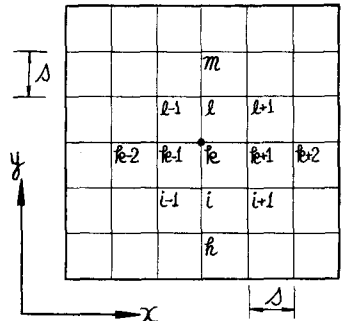


図-2

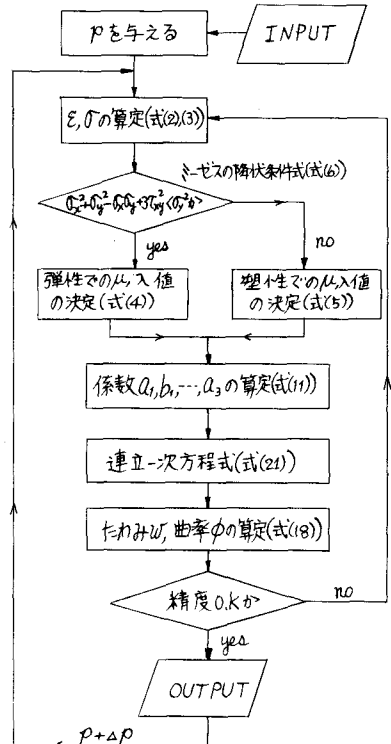


図-3

$$w_{2i} = -w_i, \quad w_{2i+1} = -w_{2i-1}, \quad w_{2i-1} = -w_{2i-3} \quad \text{-----(20)}$$

以上の考察に基づいて単純支持正方形板の解析を行えば下記のごとくである。すなわち、式(19),(20)の境界条件式を加味した上で、各格子点に式(17)の基本差分方程式を適用すれば、結局 w に関する次の連立方程式をうる。

$$[A_o][w] = [P_o] \quad \text{-----(21)}$$

ここに、 $[A_o]$:式(17)の係数からえられる行列、 $[P_o]$:荷重項の列行列。

よって、式(21)を解けば、与荷重に対するたわみ w が求められ、さらに式(18),式(2)および式(3)を順次用いて曲率、ひずみおよび応力が算定されることとなる。その際、式(7)の初期値として近似に弾性値を与える故、電子計算機を用いての収斂計算が必要であり、その演算手法をFlow Chartに示せば、図-3のごとくである。

4. 計算例

図-4に示すごとき辺長 a の単純支持正方形板を解析し、下記の結果をえた。ただし、差分間隔を $\Delta = a/10$ とし、断面の分割数は $n=10$ とした。図-5は板の中央格子点における荷重-変位曲線であり、図-6は荷重増加による塑性域の広がりを見示したもので、図中の番号 $I(I=1,2,\dots)$ は第 I 番目の分割断面まで塑性域が進行していることを示している(図-1参照)。なお、本例では断面の中心軸の近傍($I=5,6$)には塑性域が現われず、塑性関節が生じなかった。これはこの部分に発生するせん断核の影響を無視したことが一因と考えられ、目下せん断核の影響を考慮した場合の解法を検討中である。

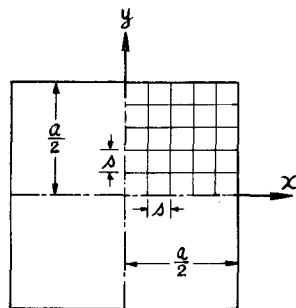


図-4

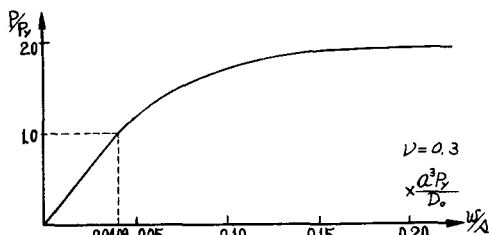


図-5 (P_0 : 弾性限界時の荷重, D_0 : 板の曲げ剛性)

5. 結 び

本研究は過面外荷重を受ける平板の曲げ変形と応力の解法を提示したもので、その特色を要約すれば、

(1) 荷重増加に伴う塑性域の三次元的広がりを徹密に追跡解明しうること、

(2) 任意支持条件を有する形状任意の平板を一貫した手法で解析しうること、

などが挙げられる。なお数値計算はすべて本学の電子計算機FACOM-230-60を使用した。

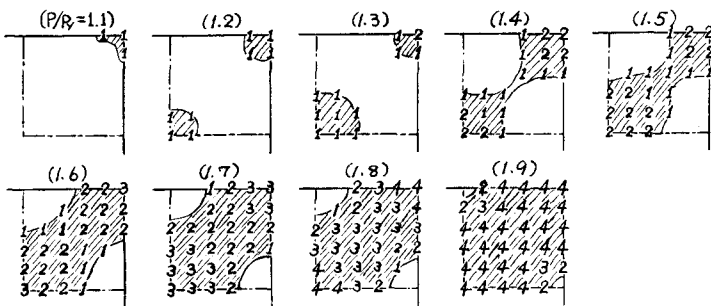


図-6

(参考文献)

- (1) A.K. Bhavnick & J.T. Hanley, "Elasto-Plastic Plate Analysis by Finite Differences", Journal of the Structural Division, Proc. of the A.S.C.E. vol 93, Oct. 1967.
- (2) A.H.-S. Ang, L.A. Lopez, "Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of the A.S.C.E. vol 94, Feb. 1968.
- (3) Y. Yokoo, T. Nakamura, T. Mori, "Numerical Analysis of Elastic-Plastic Deformation of Simply Supported Rectangular Plates", 日本建築学会論文報告集, 第152号, 昭和43年10月.
- (4) ソコロフスキー, "塑性学", 朝倉書店, 昭和34年