

秋田大学鉱山学部 正員 色部 誠

1. 基本仮定.

橋床に使われる複鉄筋コンクリート板のような直交異方性を有する長方形板の弾塑性曲げを考える。等方性の弾塑性長方形板については Massonet^[1]; Ang d Lopez^[2]; Yokoo, Nakamura d Mori^[3]; 山崎, 大田, 坂本^[4]らの研究がある。いずれも von Mises の降伏条件が用いられている。また、数値計算にあたっては、前三論文[1],[2],[3]では Finite Difference Method が、論文[4]では Finite Element Method が用いられている。

以下においては降伏条件には R. Hill^[5]の条件を適用する。すなわち、板は図-1のように三層からなるサンドイッチ板として作用するものとし、中間層はせん断力のみを伝え、上下の二層は平面応力状態を呈し、対をなして外モーメントに抵抗するものとする。そして上下二層の降伏と同時に断面は降伏するものとする。そのほか、ここに用いる主要な仮定をつぎに示す。

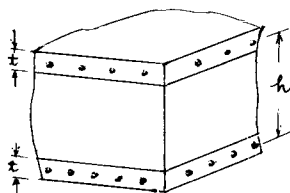


図 - 1

- (1) 変形は微小とし、平面保持の法則が適用されるものとする。
- (2) 上下二層は非硬化材料からなるものとする。
- (3) モーメント — 曲率関係に関しては歪増分理論が当てはまるものとする。

2. 基礎方程式

板の異方性主軸を x, y 座標軸にとる。これらは、通常、鉄筋コンクリート板の縦横の方向と一致する。鉄筋とコンクリートとからなる合成材の降伏条件を定義することは困難であるが、上下の二層内で鉄筋比がかなり大きくなれば、降伏に対する鉄筋の影響が大となり、かつ異方性が顕著であれば、上下二層の降伏条件も von Mises の条件によって近似することができよう。Hill の降伏条件は異方性が小さくなるに近づくが、von Mises の条件に接近するもので、二次元応力状態の場合次式によってあらわされる。

$$2f(\sigma_{ij}) = (G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (1)$$

(1) 式を拡張し、曲げを受ける板の降伏条件として、

$$2f(M_x, M_y, M_{xy}) = (G+H)M_x^2 - 2HM_xM_y + (H+F)M_y^2 + 2NM_{xy}^2 = 1 \quad (2)$$

を用いる。 x 面, y 面の降伏モーメントを M_x^0, M_y^0 , 降伏捻りモーメントを M_{xy}^0 とすれば、(2) 式中の F, G, H, N とこれらの降伏モーメントとのあいだには

$$\left(\frac{1}{M_x^0}\right)^2 = G+H, \quad \left(\frac{1}{M_y^0}\right)^2 = H+F, \quad \left(\frac{1}{M_{xy}^0}\right)^2 = 2N$$

の関係がある。

(2) 式の $f(M_x, M_y, M_{xy})$ を塑性ポテンシャルでもあると仮定すると、微小変形の際のモーメント-曲率関係式は、非硬化材料の増分式を拡張すれば、

$$\left. \begin{aligned} d\kappa_x &= d\kappa_x^e + d\kappa_x^p = \frac{D_x dM_x - D_1 dM_y}{D_x D_y - D_1^2} + d\lambda \{(G+H)M_x - HM_y\} \\ d\kappa_y &= d\kappa_y^e + d\kappa_y^p = \frac{D_y dM_y - D_1 dM_x}{D_x D_y - D_1^2} + d\lambda \{(H+F)M_y - HM_x\} \\ d\kappa_{xy} &= d\kappa_{xy}^e + d\kappa_{xy}^p = \frac{dM_{xy}}{2D_{xy}} + d\lambda \{2NM_{xy}\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。ところで、 $d\lambda$ は、 $2f(M_x, M_y, M_{xy}) = 1$ から

$$df = (G+H)M_x dM_x - HM_y dM_x - HM_x dM_y + (H+F)M_y dM_y + 2NM_{xy} dM_{xy} = 0 \quad (4)$$

のなりたつところでは、0 になる正の値ととり、 $2f < 1$ か、または $2f = 1$ から $df < 0$ のところでは 0 である。また (3) 式中の D_x, D_y, D_1 および D_{xy} はサントイッ4板を考慮しているので、板の異方性主軸方向の弾性係数を E'_x, E'_y, E'' および G とすれば、

$$D_x = \frac{h^3 t}{2} E'_x, \quad D_y = \frac{h^3 t}{2} E'_y, \quad D_1 = \frac{h^3 t}{2} E'', \quad D_{xy} = \frac{h^3 t}{2} G$$

である。上式中、 h は板の上下層中心間距離、 t は上層、下層の厚さである。

変位増分を dw とすれば、曲率増分は次式によって得られる。

$$d\kappa_x = -\frac{\partial^2 dw}{\partial x^2}, \quad d\kappa_y = -\frac{\partial^2 dw}{\partial y^2}, \quad d\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

(3) 式の逆関係をつくり、(5) 式を用いれば

$$\left. \begin{aligned} dM_x &= -D_x \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} - (D_x m_1 + D_1 m_2) d\lambda \\ dM_y &= -D_y \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} - (D_y m_2 + D_1 m_1) d\lambda \\ dM_{xy} &= 2D_{xy} \frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} - 2D_{xy} m_3 d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を得る。ところで

$$m_1 = (G+H)M_x - HM_y$$

$$m_2 = (H+F)M_y - HM_x$$

$$m_3 = 2NM_{xy}$$

である。

荷重とモーメントとのつり合いはあの増分に対してもなりたつ。すなわち、

$$\frac{\partial^2 dM_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 dM_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 dM_y}{\partial y^2} = -d q \quad (7)$$

(7) 式に (6) 式を用いれば、次式を得る。

$$\begin{aligned}
& D_x \frac{\partial^4 dw}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + D_1) \frac{\partial^4 dw}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 dw}{\partial y^4} \\
& + (D_x m_1 + D_1 m_2) \frac{\partial^2 d\lambda}{\partial x^2} - 2D_{xy} m_3 \frac{\partial^2 d\lambda}{\partial x \partial y} + (D_y m_2 + D_1 m_1) \frac{\partial^2 d\lambda}{\partial y^2} \\
& + 2\left\{ (D_x \frac{\partial m_1}{\partial x} + D_1 \frac{\partial m_2}{\partial y}) - D_{xy} \frac{\partial m_3}{\partial y} \right\} \frac{\partial d\lambda}{\partial x} + 2\left\{ (D_y \frac{\partial m_2}{\partial y} + D_1 \frac{\partial m_1}{\partial x}) - D_{xy} \frac{\partial m_3}{\partial x} \right\} \frac{\partial d\lambda}{\partial y} \\
& + \left\{ (D_x \frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 m_2}{\partial x^2}) + (D_y \frac{\partial^2 m_2}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 m_1}{\partial y^2}) - 2D_{xy} \frac{\partial^2 m_3}{\partial x \partial y} \right\} d\lambda \\
& = dq
\end{aligned} \tag{8}$$

また、(4) 式に (6) 式を代入すれば、

$$\begin{aligned}
& (D_x m_1 + D_1 m_2) \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} - 2D_{xy} m_3 \frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} + (D_y m_2 + D_1 m_1) \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} \\
& + (D_x m_1^2 + 2D_1 m_1 m_2 + D_y m_2^2 + 2D_{xy} m_3^2) d\lambda = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

を得る。

(8), (9) 式が dw , $d\lambda$ を未知量とする非硬化材料からなる直交異方性サンドイッチ板の弾塑性方程式である。

3. 弾塑性方程式の積分。

連立偏微分方程式 (8), (9) を直接解くことはほとんど望むべくもない。しかし、考える長方形板に座標軸に平行な正方形格子線をひき、格子点 (i, j) における $d\omega_{ij}$, $d\lambda_{ij}$ によって (8), (9) 式を差分方程式にかきかえ、得られるところの $d\omega_{ij}$, $d\lambda_{ij}$ に因する線形連立方程式を解けば、その近似解を求めることができる。もちろん、境界条件式も差分式にかきあらねばならない。与えられた境界条件を考慮し、(8), (9) 式から導かれる差分方程式はつぎのように表示される。

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \frac{dw}{d\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dq \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

A_1 , A_2 は (8) 式の係数から B_1 , B_2 は (9) 式の係数から得られる行列である。

いま、 $(n-1)$ 段目の荷重増分に対する解が求まり、モーメントならびに変位の累加 $M^{(n-1)}$, $w^{(n-1)}$ が得られたものとする。この段階で降伏している点を $(p, q), \dots, (r, s)$ とする。 n 段目の荷重増分 dq に対する解はつぎの手順によって得られる。

(i) $M^{(n-1)}$ を用いて $A_1^{(n)}$, $B_1^{(n)}$, $B_2^{(n)}$ の要素の値を決定する。 $(p, q), \dots, (r, s)$ 以外の点の $d\lambda$ を 0 とする。

(ii) (9) 式を解いて $d\omega^{(n)}$, $d\lambda^{(n)}$ を得る。

(iii) (6) 式により $dM^{(n)}$ を求め、これを $M^{(n-1)}$ に加えて $M^{(n)}$ を定める。

(iv) $M^{(n)}$ と (2) 式を用いて、あらたな点の降伏を判定し、 $2f \geq 1$ となるあらたな点が生ずれば、これを $(p, q), \dots, (r, s)$ 点と同様に扱い、(i), (ii), (iii) の計算を再度行う。

(v) さらに、 $2f \geq 1$ となる点があれば、 $w^{(n-1)}$ に $d\omega^{(n)}$ を加えて、 $w^{(n)}$ を定める。

(vi) 降伏した点のうちで $2f > 1$ となる点に対しては、 $2f = 0$ となるようモーメントの補正を行う。

い、 m 段目の計算を終了する。

以上の計算は板に塑性ヒンジが発生するまで続けられる。

参考文献

- [1] Massonet, Ch. General Theory of Elasto-Plastic Membrane-Plates. Engineering Plasticity, Cambridge Press, 1968.
- [2] Ang, A. H. S. & Lopez, L. A. Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates. Proc. ASCE, vol. 94, Feb. 1968.
- [3] Yokoo, Y., Nakamura, T. & Mori, T. Numerical Analysis of Elastic-Plastic Deformation of Simply Supported Rectangular Plates. Trans. A.I.J. No. 152, Oct. 1968.
- [4] 山崎 徳也, 太田 俊昭, 坂本 紘二. 矩形板の弾塑性解析. 第 23 回年次学術講演会講演概要第 I 部. 土木学会 1968.
- [5] Hill, R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Press.