

大阪市立大学工学部 正員 倉田 宗章

大阪市立大学工学部 正員 園田 恵一郎

1. まえがき

昨年度発表した格子桁の問題⁽¹⁾に引き続き平板の極限強度問題を取り扱った。平板の極限強度を求める問題を Mathematical Programming の問題に置き換えて解析した例として D.C.A. Koopman, and R.H. Lance⁽²⁾ および P.G. Hodge, and T. Belytschko⁽³⁾ の研究が挙げられる。前者は軸対称荷重を受ける円板および等分布荷重を受ける正方形板を対象とし, Tresca の降伏条件式を区分的線型化を行ない線型計画の問題として取り扱い, また後者は Von Mises の降伏条件式に従う正方形板, 矩形板を対象とし, 従来得られているものより勝れた下界解, 上界解を得るために非線型計画法の手法 (Sequential Unconstrained Minimization Technique) を用いたものである。本研究は Von Mises の降伏条件式に従う円板, 正方形板, 矩形板を対象とし応力つりあいの微分方程式を階差式に書き変え, これと降伏条件式からなる2次の不等式を制約条件とし, 荷重強度を目的関数とする凸計画 (Convex Programs) の問題として取り扱い, J.E. Kelley 氏の "Cutting Plane Method"⁽⁴⁾ を利用した数値解析を研究したものである。

2. 軸対称荷重を受ける円板

2.1 応力つりあい方程式 円板の半径: R , 半径方向の曲げモーメント: M , 円周方向の曲げモーメント: N , 荷重強度: P , 全塑性曲げモーメント: M_0 とし, 無次元量 $\mu = PR^2/M_0$, $m' = M/M_0$, $n' = N/M_0$ および半径方向の無次元座標 $x = r/R$ によって表わせば,

$$\frac{d}{dx}(xm') - n' = - \int_0^x x p dx \quad (1)$$

いま, 網目間隔 $h = \Delta/R$, 網目数を δ , 基準荷重強度を p_0 とし, 式(1)を階差式で表わせば

$$jh \frac{-m'_{j+2} + 8m'_{j+1} - 8m'_{j-1} + m'_{j-2}}{12h} + m'_j - n'_j + \frac{h^2}{2} p_0 \sum_{k=1}^j h \frac{p_{k-1}}{p_0} = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, \delta-2) \quad (2)$$

$$jh \frac{-2m'_{j+1} - 3m'_j + 6m'_{j-1} - m'_{j-2}}{6h} + m'_j - n'_j + \frac{h^2}{2} p_0 \sum_{k=1}^j h \frac{p_{k-1}}{p_0} = 0 \quad (j=\delta-1) \quad (3)$$

$$jh \frac{-11m'_j + 18m'_{j-1} - 9m'_{j-2} + 2m'_{j-3}}{6h} + m'_j - n'_j + \frac{h^2}{2} p_0 \sum_{k=1}^j h \frac{p_{k-1}}{p_0} = 0 \quad (j=\delta) \quad (4)$$

式(2)の階差表示による誤差の大きさは $O(h^4)$ であり, 式(3), 式(4)では $O(h^3)$ である。このように境界点付近で異なった表示を用いたのは仮想点の導入をさけ板内点のみで表わすためである。

2.2 降伏条件式 Von Mises の降伏条件式に従うサンドウィッチ板を仮定すれば板要素の降伏条件式は $M^2 - MN + N^2 = M_0^2$ したがって板内において降伏条件式を犯さない条件は

$$m_j^2 - m'_j n'_j + n_j'^2 \leq 1 \quad (j=1, 2, 3, \dots, \delta-1) \quad (5)$$

2.3 境界条件

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a) 周辺単純支持: } m'_\delta = 0, & -1 \leq n'_\delta \leq 1 \\ \text{(b) 周辺固定: } m_\delta'^2 - m'_\delta n'_\delta + n_\delta'^2 \leq 1 \end{array} \right\} \quad (6)$$

2.4 数学的計画法の適用

極限解析法において静的許容、かつ安全な応力場とは式(2)～式(4)の応力つりあい条件式と式(6)の境界条件式そして式(5)の降伏条件を同時に満足する曲げモーメント分布を意味し、それらは無数に存在するが下界定理によりそれらの中で基準荷重 P_0 を最大にするものが真のモーメント分布である。したがって極限荷重を求める問題を数学的計画の問題と見なせば式(2)～式(6)を制約条件として基準荷重強度 P_0 を最大にする凸計画の問題に帰着する。以下の計算において変数はすべて非負な値として取り扱う方が都合が良いので式(5)を考慮して新たな変数 $m = m' + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $n = n' + \frac{2}{\sqrt{3}}$ を導入して書き改めれば、この問題は

$$\{a_{ij}\}\{m_j\} + \{b_{ij}\}\{n_j\} + \frac{P_0}{2}\{g_j\} = \{b_j\} \quad (7-1)$$

$$\{m_j^2\} - \{m_j n_j\} + \{n_j^2\} - \frac{2}{\sqrt{3}}\{m_j\} - \frac{2}{\sqrt{3}}\{n_j\} - \frac{1}{3}\{I\} \leq \{0\} \quad (7-2)$$

$\max P_0$

こゝに、式(7-1)は式(2)～(4)を境界条件を考慮して変形したものであり、 $\{b_j\}$ は全ての要素が非負なる常数である列マトリックス、 $\{0\}$ はゼロベクトル、 $\{I\}$ はすべての要素が1なる列マトリックス。この問題を“Cutting Plane Method”を用いて解いていく。すなわち、まず最初に式(7-2)の代りに $\{0\} \leq \{m_j\} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}\{I\}$, $\{0\} \leq \{n_j\} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}\{I\}$ なる制約条件式を導入して線型計画の問題に置き換え、Simplex法により最適解 $\{m_j\}'$, $\{n_j\}'$ を求める。この最適解を式(7-2)の左辺に代入して

$$\{\delta_j\}' = \{m_j^2\}' - \{m_j n_j\}' + \{n_j^2\}' - \frac{2}{\sqrt{3}}\{m_j\}' - \frac{2}{\sqrt{3}}\{n_j\}' - \frac{1}{3}\{I\} \quad (8)$$

を計算し、もし $\{\delta_j\}' \leq \{0\}$ なら $\{m_j\}'$, $\{n_j\}'$ は求める解であり、 $P_{0,1} = \max P_0$ は求める荷重強度である。しかし $\{\delta_j\}' \not\leq \{0\}$ なら、 $\{\delta_j\}'$ の要素の中で0より大きい要素 $\delta_{i\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots, r$, $r \leq \Delta + 1$)に対応する変数 m_λ, n_λ に関してつぎの制約条件式を追加して再び式(7)の線型計画の問題を解く。

$$\begin{matrix} [d_{\lambda\lambda}] & [d_{\lambda\lambda}] & [d_{\lambda\lambda}] \\ r \times r & r \times 1 & r \times r & r \times 1 & r \times 1 \end{matrix} \{m_\lambda\} + \{d_{\lambda\lambda}\}\{n_\lambda\} \leq \frac{1}{2}\{f_\lambda\} \quad (9)$$

こゝに、 $\{m_\lambda\}$: $\{m_j\}$ のSubmatrixであり、式(8)において $\delta_{i\lambda}$ に対応する要素よりなる。

$\{n_\lambda\}$: $\{n_j\}$ のSubmatrixであり、式(8)において $\delta_{i\lambda}$ に対応する要素よりなる。

$[d_{\lambda\lambda}]$: 対角行列であり、対角要素 $d_{\lambda\lambda} = 2m_{i\lambda} - n_{i\lambda} - 1$ ($m_{i\lambda}, n_{i\lambda}$ は $\{m_\lambda\}', \{n_\lambda\}'$ の要素)

$[\bar{d}_{\lambda\lambda}]$: 対角行列であり、対角要素 $\bar{d}_{\lambda\lambda} = 2n_{i\lambda} - m_{i\lambda} - 1$

$$\{f_\lambda\} = \{m_\lambda^2\}' - \{n_\lambda^2\}' + \{m_\lambda n_\lambda\}'$$

この最適解を $\{m_j\}^2, \{n_j\}^2$ とし、式(8)の左辺に代入し $\{\delta_j\}^2$ を求め、 $\{\delta_j\}^2 \leq \{0\}$ なら $\{m_j\}^2, \{n_j\}^2$ は求める解であり、 $P_{0,2} = \max P_0$ は求める荷重強度 P_0 になる。しかしながら $\{\delta_j\}^2 \not\leq \{0\}$ なら前と同様に新たな制約条件式を追加し繰り返し計算する。このようにすれば、 $P_{0,1} \geq P_{0,2} \geq P_{0,3} \geq \dots \geq P_{0,n} \geq P_0$ となり、繰り返し回数 n を充分大きく取れば $P_{0,n}$ は P_0 に無限に近づいていく。

3. 矩形板

3.1 応力つりあい方程式 全塑性曲げモーメント: M_0 , 全塑性ねじりモーメント: T_0 とすれば、直交座標 X, Y に関するモーメント(M_x, M_y, M_{xy})のつりあい条件式は

$$\frac{\partial^2 m'}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial^2 t'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 n'}{\partial y^2} + p = 0 \quad (10)$$

こゝに、 $m' = M_x / M_0$, $n' = M_y / M_0$, $t' = M_{xy} / T_0$, $p = PL^2 / M_0$, $\beta = T_0 / M_0$, $x = X / L$,
 $y = Y / L$ (ただし、 P は分布荷重強度、 L は基準長さを示す。)

いま、 x 方向の細目数を n 、 y 方向を m とし、それぞれ方向の細目間隔を a 、 b とすれば、式(10)の階差式は

$$\begin{aligned} & -2m'_{i,j-2} + 32m'_{i,j-1} - 60m'_{i,j} + 32m'_{i,j+1} - 2m'_{i,j+2} + 2\alpha^2(-n'_{i-2,j} + 16n'_{i-1,j} - 30n'_{i,j} + 16n'_{i+1,j} \\ & - n'_{i+2,j}) - 2\alpha\beta(10t'_{i+1,j+1} - 10t'_{i-1,j+1} + 10t'_{i-1,j-1} - 10t'_{i+1,j-1} - t'_{i+1,j+2} - t'_{i-1,j+2} + t'_{i-1,j+2} + t'_{i+1,j+2} \\ & - t'_{i-1,j-2} - t'_{i-2,j-1} + t'_{i+1,j-2} + t'_{i+2,j-1}) + 24\alpha^2 p_0 \frac{p_0}{p_0} = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

ただし、 $i = 2, 3, \dots, m-2$, $j = 2, 3, \dots, n-2$, $\alpha = a/b$, p_0 : 基準荷重強度

$$\begin{aligned} & m'_{i,j-1} - 2m'_{i,j} + m'_{i,j+1} + \alpha^2(n'_{i-1,j} - 2n'_{i,j} + n'_{i+1,j}) - \frac{\alpha\beta}{2}(t'_{i+1,j+1} - t'_{i-1,j+1} + t'_{i-1,j-1} - t'_{i+1,j-1}) \\ & + \alpha^2 p_0 \frac{p_0}{p_0} \quad \text{ただし、} i=1, m-1, j=1, n-1 \quad (12) \end{aligned}$$

3.2 降伏条件および境界条件 Von Misesの降伏条件を犯さない条件は

$$m'^2_{i,j} - m'_{i,j}n'_{i,j} + n'^2_{i,j} + t'^2_{i,j} \leq 1 \quad (13) \quad \text{一方、境界条件は}$$

$$\left. \begin{aligned} (a) \text{ 単純支持辺 (} x \text{軸と平行)} \quad n' = 0, m'^2 + t'^2 &\leq 1 \\ (b) \text{ 固定支持辺 (} \quad \quad \quad) \quad m'^2 - m'n' + n'^2 + t'^2 &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3.3 数学的計画法の適用 円板の場合と同様、非負なる変数 $m = m' + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $n = n' + \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$t = t' + 1$, を導入し、式(11)~(14)を式(7)と同じ形式に書き改め、これらの制約条件式の内非線型な条件式の代りにまず $\{0\} \leq \{m_j\} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}\{I\}$, $\{0\} \leq \{n_j\} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}\{I\}$, $\{0\} \leq \{t_j\} \leq 2\{I\}$ を用い、線型計画の問題として最適解 $\{m_j\}', \{n_j\}', \{t_j\}'$ を求める。この結果、 $\{\delta_j\}' = \{m_j\}' + \{n_j\}' + \{m_j n_j\}' - \frac{2}{\sqrt{3}}\{m_j\}' - \frac{2}{\sqrt{3}}\{n_j\}' + 2\{t_j\}' + \frac{2}{3}\{I\}$ (15) を計算し、もし $\{\delta_j\}' \notin \{0\}$ なら $\{m_j\}', \{n_j\}', \{t_j\}'$ は求める解であり、 $\{\delta_j\}' \notin \{0\}$ なら $\{\delta_j\}'$ の要素の中で0より大なる要素 $\delta_{i\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots, 3$) に対応する変数 m_λ, n_λ に関してつぎの制約条件式を追加して円板の場合と同様繰り返し計算する。

$$(2m_{i\lambda} - n_{i\lambda} - 1)m_\lambda + (2n_{i\lambda} - m_{i\lambda} - 1)n_\lambda + 2(t_{i\lambda} - 1)t_\lambda \leq m_{i\lambda}(m_{i\lambda} - n_{i\lambda}) + n_{i\lambda}^2 + t_{i\lambda}^2 + 1$$

ただし、 $\lambda = 1, 2, 3, \dots, 3$, $m_{i\lambda}, n_{i\lambda}, t_{i\lambda}$ は式(15)において $\delta_{i\lambda}$ に対応する $\{m_\lambda\}', \{n_\lambda\}', \{t_\lambda\}'$ の要素を示す。

4. 数値解析結果の精度についての考察

こゝで考えている円板および矩形板の数値計算において誤差は主に、①応力フリーあいの微分方程式を階差式で近似すること ② 2.4, 3.3で述べた繰り返し計算を有限回で打切ること ③ シンプレックス法の掃出し計算、の三つの原因によって起る。③による誤差は有効桁数を多く取った演算(計算機の中では倍精度演算)を行なうことによって充分小さくすることができる。①による誤差は階差の細目間隔を小さくすればする程減少するが、実際には計算機の記憶容量などの関係よりかなり粗い細目を用いなければならない場合がある。このような場合の誤差を的確に把握することができないが後に示す数値計算の結果、式(2)、式(11)のような高精度階差を用いることによってかなりの精度を

高めることが期待できた。②による誤差は格子桁の場合⁽¹⁾と全く同様に評価できる。すなわち第 n 回目の繰返し計算の結果、得られる $\{\delta\}^n$ の要素の中の最大値を δ_n^* ($\delta_n^* > 0$)として対応するモーメント m_n^*, n_n^* とすれば式(8) (または式(15))より $(m_n^* - 2/\sqrt{3})^2 - (m_n^* - 2/\sqrt{3})(n_n^* - 2/\sqrt{3}) + (n_n^* - 2/\sqrt{3})^2 = 1 + \delta_n^*$ それゆえ $\{m\}^n = 1/\sqrt{1+\delta_n^*} \times [\{m\}^n - \frac{2}{\sqrt{3}}\{I\}]$, $\{n\}^n = 1/\sqrt{1+\delta_n^*} \times [\{n\}^n - \frac{2}{\sqrt{3}}\{I\}]$ はすべて降伏条件式(5)を満足し、下界定理より荷重強度 $P_{0,n}/\sqrt{1+\delta_n^*}$ は求める値 P_0 より必ず小さいか等しい。一方、 $P_{0,n} \geq P_0$ であるので $P_{0,n}$ は高々 $\{1 - 1/\sqrt{1+\delta_n^*}\} P_{0,n} \leq \frac{\delta_n^*}{2} P_{0,n}$ だけ P_0 より大きくなる。

5. 計算例

Trescaの降伏条件式に従う円板に対してはH.G. Hopkins, W. Pragerが厳密解を与えている⁽⁵⁾。ここではVon Misesの降伏条件式に従う部分荷重を受ける円板を数値解析した。これらの結果を図.1~3に示す。

ここで用いた階差の網目数は円板の半径を10分割したものであり、繰返し計算は $\delta^* \leq 1/1000$ になるまで行なった。図.4は部分荷重を受ける正方形板に対する計算結果であり、網目数は 12×12 , $\delta^* \leq 1/100$

である。表.1は等分布荷重を受ける正方形板を対象とし階差の網目数の変化がどのように影響を与えるかを調べ、同時にP.G. Hodge and T. Belytschkoが求めた結果⁽³⁾と比較した。表.2は等分布荷重を受ける矩形板の崩壊荷重を求めたものである。

表1 等分布荷重を受ける正方形板の崩壊荷重(P_0/M_0)

網目数	周辺単純支持	周辺固定支持
4×4	24.954	41.477
6×6	25.018	42.891
8×8	25.090	43.164
10×10	25.094	43.328
12×12	25.091	43.470
*下界解	24.864	42.864
*上界解	26.544	49.248

(注) $\delta^* \leq 1/100$, l は辺長。
*はP.G. Hodge & T. Belytschkoに於ける値⁽³⁾

表.2 等分布荷重を受ける矩形板の崩壊荷重($P_0 l^2/M_0$)

l_x/l_y	1.1	1.25	1.5	2.0	3.0
周辺単純支持	22.910	20.527	17.859	15.008	12.640
周辺固定支持	39.486	35.385	30.976	26.374	22.728

(注) 網目数 10×8 , $\delta^* \leq 1/100$, l_x, l_y は辺の長さ。

参考文献

- (1) 倉田 園田: 非線型計画法による構造物の極限解析 (なじり剛性を有する格子桁の場合) 第23回土木学会年次学術講演会
- (2) D.C.A. Koopman & R.H. Lance: On Linear Programming and Plastic Analysis J. Mech. Phys. Solids 1965. Vol. 13, PP 77~PP 87
- (3) P.G. Hodge & T. Belytschko: Numerical Method for the Limit Analysis of Plate, Journal of Applied Mechanics DEC. 1968
- (4) J.E. Kelley, Jr.: The Cutting-plane Method for Solving Convex Programs Mo J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 8 No. 4 Dec. 1960
- (5) H.G. Hopkins & W. Prager: The Load Carrying Capacities of Circular Plates, J. Mech. Phys. Solids Vol. 2 1953 PP. 1 ~ PP. 13

図-1

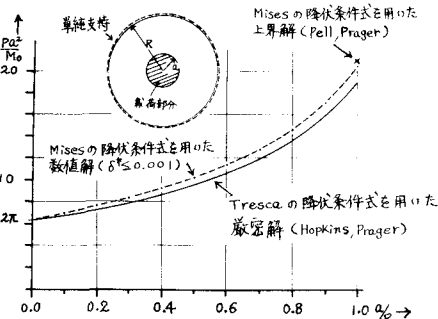


図-2

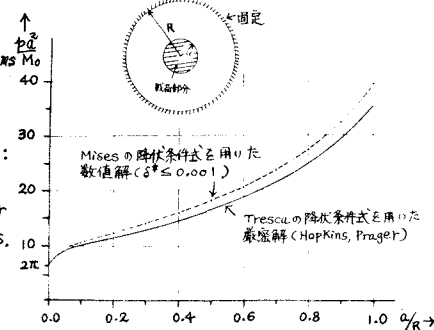


図-3 半径方向のモーメント(m)分布

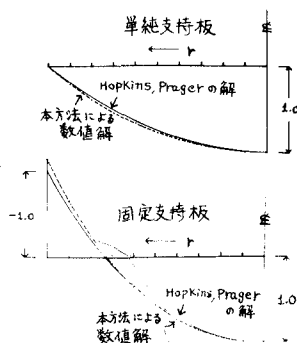


図-4

