

防衛大 土木工学教室 正員 浄法寺朝美

" " 正員 石川信隆

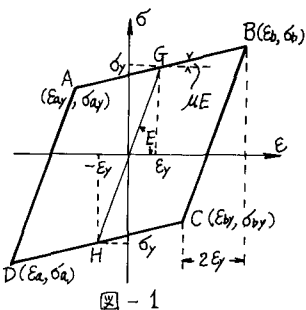
1. 緒言 繰返し荷重によるアーチの崩壊に関する既往の研究としては、福本・吉田氏らのいわゆる塑性解析法によりアーチの変形硬化荷重を求めたものがあるが、いまだ繰返し荷重を受けるアーチの弾塑性変形過程を究明したものは見受けられない。本研究は、先に著者ら²⁾が報告した繰返し移動荷重を受ける連続ばりの弾塑性解析法をアーチ構造物に応用拡張せんとするもので、まず応力-歪度係を *Bilinear* 型にモデル化したうえで、繰返し曲げモーメント (M) と軸力 (N) を受けた断面に生ずる歪分布より曲率および軸線の伸縮を M と N の一般式として誘導し、ついでアーチに対する ϕ -法公式³⁾を用いて繰返し移動荷重を受ける2ヒンジ鋼円弧アーチの弾塑性解析法の確立を企図するものである。

2. 曲げモーメントと軸力に対する曲率と軸線の伸縮との関係

応力-歪度係を図-1のごとく *Bilinear* 型の平行四辺形 $ABCD$ にモデル化すれば、 σ - ϵ 関係式は次式のごとく一般表示される。⁴⁾

$$\sigma = \bar{\mu} E (\epsilon - \bar{\epsilon}) \quad \dots (1)$$

ここに係数 $\bar{\mu}$ および $\bar{\epsilon}$ は直線 AB , BC , CD , DA に応じてそれぞれ異なった値となるが、当初 A , B , C , D 点の座標値が不明であるため、まず σ , ϵ を直線 GH 上 ($\epsilon_{ay} = \epsilon_b = \epsilon_y$, $\sigma_{ay} = \sigma_b = \sigma_y$, $\epsilon_a = \epsilon_{by} = -\epsilon$, $\sigma_a = \sigma_{by} = -\sigma_y$) の値すなわち $\bar{\mu} = 1$ および $\bar{\epsilon} = 0$ とし、以後 $\bar{\mu}$ および $\bar{\epsilon}$ を下記のごとき判別式により決定することとする。



$$(1) \epsilon \geq \epsilon_b \text{ のとき } \omega^* = 1, \sigma_{ay} = E(\epsilon_{ay} - \epsilon_a) + \sigma_a, \epsilon_b = \epsilon, \epsilon_{by} = \epsilon_b - 2\epsilon_y, \epsilon_a = \epsilon_{by},$$

$$\bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_{ay} - \sigma_{ay} / \mu E \quad \dots (2a)$$

$$(2) \epsilon_{by} < \epsilon < \epsilon_b \text{ かつ } \omega^* = 1 \text{ のとき } \sigma_b = \mu E (\epsilon_b - \epsilon_{ay}) + \sigma_{ay}, \bar{\mu} = 1, \bar{\epsilon} = \epsilon_b - \sigma_b / E \quad \dots (2b)$$

$$(3) \epsilon \leq \epsilon_a \text{ のとき } \omega^* = -1, \sigma_{by} = E(\epsilon_{by} - \epsilon_b) + \sigma_b, \epsilon_a = \epsilon, \epsilon_{ay} = \epsilon_a + 2\epsilon_y, \epsilon_b = \epsilon_{ay},$$

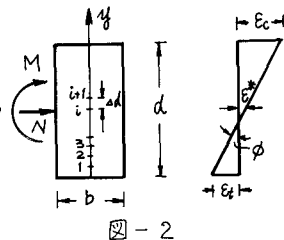
$$\bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_{by} - \sigma_{by} / \mu E \quad \dots (2c)$$

$$(4) \epsilon_a < \epsilon < \epsilon_{ay} \text{ かつ } \omega^* = -1 \text{ のとき } \sigma_a = \mu E (\epsilon_a - \epsilon_{by}) + \sigma_{by}, \bar{\mu} = 1, \bar{\epsilon} = \epsilon_a - \sigma_a / E \quad \dots (2d)$$

ただし、 ω^* は判別記号を示すもので、 ϵ が直線 AB および BC 上にあるときは $\omega^* = 1$ 、また直線 CD および DA 上にあるときは $\omega^* = -1$ の値をとるものとする。

さて、繰返し曲げモーメントおよび軸力 (圧縮を正) を受けた矩形断面に生ずる歪分布は、平面保持の法則にしたがって一般に図-2のごとくなり、その圧縮側および引張側の外縁歪をそれぞれ $\epsilon_c (> 0)$, $\epsilon_t (< 0)$ とすれば、断面内の任意の高さ y における歪 ϵ は次式のごとく表わされる。

$$\epsilon = y \cdot (\epsilon_c - \epsilon_t) / d + \epsilon_t \quad \dots (3)$$



上式を式(1)に代入したうえで、内力と外力の釣合より任意の応力状態における M および N を求めれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_0^d \sigma dA = \int_0^d \bar{\mu} E \{ y \cdot (E_c - E_t) / d + E_t - E_c \} dA \\ M + N \cdot d/2 &= \int_0^d \sigma y dA = \int_0^d \bar{\mu} E \{ y \cdot (E_c - E_t) / d + E_t - E_c \} dA \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

式(4)中の $\bar{\mu}$ および $\bar{E}$ は断面内の各点でそれぞれ異なる値となるゆえ、これら両式の積分値を近似的に台形公式より求めたうえで、 E_c および E_t について連立に解けば次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} E_c &= (-f_M \cdot M/M_Y - f_N \cdot N/N_Y + f_0) E_Y \\ E_t &= (e_M \cdot M/M_Y + e_N \cdot N/N_Y - e_0) E_Y \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ここに係数 $f_M, f_N, \dots, e_0$ は表-1に示す内容となり、また $N_Y = bd \sigma_Y, M_Y = bd^2 \sigma_Y / 6$ 。

表-1

f_M	$d/\Delta d \cdot a_1/a_c$	e_M	$d/\Delta d \cdot a_2/a_c$	a_1	$\sum_{i=1}^n \{ \bar{\mu}_i (1-y_i)/d + \bar{\mu}_{i+1} (1-y_{i+1})/d \}$
f_N	$d/\Delta d \cdot (3a_1 - 2C_1)/a_c$	e_N	$d/\Delta d \cdot (3a_2 - 2C_2)/a_c$	a_2	$\sum_{i=1}^n \{ \bar{\mu}_i \cdot y_i/d + \bar{\mu}_{i+1} \cdot y_{i+1}/d \}$
f_0	$(a_1 C_3 - a_3 C_1)/a_c$	e_0	$(a_2 C_3 - a_3 C_2)/a_c$	a_3	$\sum_{i=1}^n \{ \bar{\mu}_i \cdot \bar{E}_i/E_Y + \bar{\mu}_{i+1} \cdot \bar{E}_{i+1}/E_Y \}$
C_1	$\sum_{i=1}^n \{ \bar{\mu}_i (2y_i/d + y_{i+1}/d) (1-y_i/d) + \bar{\mu}_{i+1} (y_i/d + 2y_{i+1}/d) (1-y_{i+1}/d) \}$				$a_c = a_1 C_2 - a_2 C_1$
C_2	$\sum_{i=1}^n \{ \bar{\mu}_i (2y_i/d + y_{i+1}/d) y_i/d + \bar{\mu}_{i+1} (y_i/d + 2y_{i+1}/d) y_{i+1}/d \}$				$\Delta d = d/n$
C_3	$\sum_{i=1}^n \{ \bar{\mu}_i (2y_i/d + y_{i+1}/d) \bar{E}_i/E_Y + \bar{\mu}_{i+1} (y_i/d + 2y_{i+1}/d) \bar{E}_{i+1}/E_Y \}$				$y_i = (i-1) \Delta d$

よって、曲率 ϕ および軸線の伸縮 ε^* (縮みを正)は図-2の歪分布より $\phi = (E_t - E_c)/d$ および $\varepsilon^* = (E_c + E_t)/2$ となるゆえ、これらに式(5)を代入すれば結局所要の ϕ および ε^* が次式のごとく M および N の関数として誘導されることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi/\phi_Y &= g_M \cdot M/M_Y + g_N \cdot N/N_Y - g_0 \\ \varepsilon^*/\varepsilon_Y &= h_M \cdot M/M_Y + h_N \cdot N/N_Y - h_0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } g_M &= (e_M + f_M)/2, & g_N &= (e_N + f_N)/2, & g_0 &= (e_0 + f_0)/2, \\ h_M &= (e_M - f_M)/2, & h_N &= (e_N - f_N)/2, & h_0 &= (e_0 - f_0)/2. \end{aligned}$$

式(5)および式(6)の演算ではデータとして M および N を与えるが、当初係数 $g_M, g_N, \dots, h_0$ 中に含まれる $\bar{\mu}$ および $\bar{E}$ が未知なるゆえ、式(2)によって判別したうえで表-1および式(3)を用いる繰返し試算により式(5)の E_c および E_t については式(6)の ϕ および ε^* を算定することとなる。

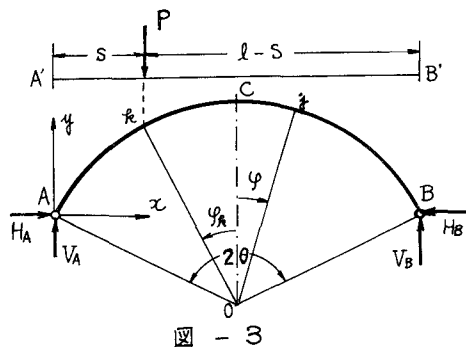
3. 繰返し移動荷重を受けるアーチの弾塑性解析法

上記誘導の近似 $M, N-\phi, \varepsilon^*$ 関係式およびアーチに対する ϕ -法公式を用いて以下にアーチの弾塑性解析法を解説する。

図-3に示すごとき2ヒンジ用弧アーチに集中荷重 P が A' 点より B' 方向に、また B' 点より A' 方向に繰返し移動載荷するとき、初期降伏時より最終崩壊時に至る全過程のたわみを求めれば次のごとくである。

(1) 不静定量の算定

まず移動荷重 P が A' 点より移動距離 s なるた点に載荷するとき、任意点 j の曲げモーメント M および軸力 N は水平反力 $H_A (= H_B)$ を不静定量として次式のごとく表わされる。



(i) $0 \leq x \leq S$ ($-\theta \leq \varphi \leq \varphi_R$) のとき

$$\left. \begin{aligned} M/M_y &= Kr \{ V_A (\sin \theta + \sin \varphi) - H_A (\cos \varphi - \cos \theta) \} \\ N/N_y &= H_A \cos \varphi - V_A \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots (7a)$$

(ii) $S \leq x \leq l$ ($\varphi_R \leq \varphi \leq \theta$) のとき

$$\left. \begin{aligned} M/M_y &= Kr \{ V_B (\sin \theta - \sin \varphi) - H_A (\cos \varphi - \cos \theta) \} \\ N/N_y &= H_A \cos \varphi + V_B \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots (7b)$$

ただし, $Kr = N_y r / M_y = 6r/d$, $V_A = V_A / N_y = (l-S)P / N_y l$, $V_B = V_B / N_y = SP / N_y l$, $H_A = H_A / N_y$.
つぎに, アーチに対する ϕ -法公式³⁾ および支束の境界条件 $\delta_A^x = \delta_B^x = 0$ を用いて不静定量 H_A が以下のごとく誘導される。文献(3)の式(15a)に $h = 0$ とおけば,

$$\begin{aligned} \delta_B^x &= - \int_A^B \{ \phi(-y) + \varepsilon^* \cos \varphi \} ds \\ &= - \left[\int_{-\theta}^{\varphi_R} \left\{ \frac{\phi}{\varphi} (\cos \theta - \cos \varphi) + \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y} R_d \cos \varphi \right\} d\varphi + \int_{\varphi_R}^{\theta} \left\{ \frac{\phi}{\varphi} (\cos \theta - \cos \varphi) + \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y} R_d \cos \varphi \right\} d\varphi \right] \frac{M_y r^2}{EI} = 0 \dots (8) \end{aligned}$$

ただし, $R_d = \varepsilon_y / \varphi_y r = d/2r$

上式に式(6)および式(7a), (7b)を代入したうえで, H_A を求めれば結局次式がえられることとなる。

$$\frac{H_A}{N_y} = \frac{\alpha_2 V_A + \alpha_3 V_B + \alpha_4}{\alpha_1} \dots (9)$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-\theta}^{\theta} [Kr (\cos \varphi - \cos \theta) \{ g_M (\cos \theta - \cos \varphi) + R_d h_M \cos \varphi \} - \cos \varphi \{ g_N (\cos \theta - \cos \varphi) + R_d h_N \cos \varphi \}] d\varphi, \\ \alpha_2 &= \int_{-\theta}^{\varphi_R} [Kr (\sin \theta + \sin \varphi) \{ g_M (\cos \theta - \cos \varphi) + R_d h_M \cos \varphi \} - \sin \varphi \{ g_N (\cos \theta - \cos \varphi) + R_d h_N \cos \varphi \}] d\varphi, \\ \alpha_3 &= \int_{\varphi_R}^{\theta} [Kr (\sin \theta - \sin \varphi) \{ g_M (\cos \theta - \cos \varphi) + R_d h_M \cos \varphi \} + \sin \varphi \{ g_N (\cos \theta - \cos \varphi) + R_d h_N \cos \varphi \}] d\varphi, \\ \alpha_4 &= \int_{-\theta}^{\theta} \{ g_0 (\cos \theta - \cos \varphi) - R_d h_0 \cos \varphi \} d\varphi. \end{aligned}$$

式(9)の演算は当初係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_4$ 中の $g_M, h_M, \dots, h_0$ が未知なるゆえ, まず第1次近似値として H_A の弾性値すなわち式(9)に $g_M = h_M = 1$, $h_M = g_N = g_0 = h_0 = 0$ を代入した値を用い, 以後式(6)および式(7)を用いる繰返し試算により H_A を算定することとなる。なお, 式(9)の係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_4$ の積分は $g_M, h_M, \dots, h_0$ が各断面において異なる値となるため, アーチを m 等分して区間長 $\Delta\varphi = 2\theta/m$ 内では $g_M, h_M, \dots, h_0$ の値を一定と見做すこととした。

(2) たわみおよびたわみ角の算定

任意点 j のたわみ δ_j^x , δ_j^y およびたわみ角 θ_j は文献(3)の式(15)を用いてそれぞれ求められるが, 一例として中央点 C のたわみ δ_C^x を算定すれば次式がえられる。

(i) $0 \leq S \leq l/2$ ($-\theta \leq \varphi_R \leq 0$) のとき

$$\begin{aligned} \delta_C^x &= \frac{l}{2} \theta_A - \int_A^C \left\{ \phi \left(\frac{l}{2} - x \right) + \varepsilon^* \sin \varphi \right\} ds \\ &= \frac{l}{2} \theta_A - \left[\int_{-\theta}^{\varphi_R} \left(-\frac{\phi}{\varphi} + R_d \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y} \right) \sin \varphi d\varphi + \int_{\varphi_R}^0 \left(-\frac{\phi}{\varphi} + R_d \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y} \right) \sin \varphi d\varphi \right] \frac{M_y r^2}{EI} \dots (10a) \end{aligned}$$

(ii) $l/2 \leq S \leq l$ ($0 \leq \varphi_R \leq \theta$) のとき

$$\delta_C^x = \frac{l}{2} \theta_A - \left[\int_0^{\varphi_R} \left(-\frac{\phi}{\varphi} + R_d \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y} \right) \sin \varphi d\varphi \right] \frac{M_y r^2}{EI} \dots (10b)$$

ただし, ϕ , ε^* および R_d , ε_y^* は式(6)にそれぞれ式(7a)および式(7b)を代入した値を示し, また θ_A は支束の境界条件 $\delta_A^x = \delta_B^x = 0$ より次式のごとく求められる。

$$\theta_A = \int_A^B \left\{ \phi \left(\frac{l-x}{l} \right) + \varepsilon^* \frac{\sin \varphi}{l} \right\} ds$$

$$= \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{Q_1}{P_0} \left(\frac{\sin \theta - \sin \varphi}{2 \sin \theta} \right) + R_d \cdot \frac{\epsilon_1^*}{\epsilon_y} \frac{\sin \varphi}{2 \sin \theta} \right\} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left\{ \frac{Q_2}{P_0} \left(\frac{\sin \theta - \sin \varphi}{2 \sin \theta} \right) + R_d \cdot \frac{\epsilon_1^*}{\epsilon_y} \frac{\sin \varphi}{2 \sin \theta} \right\} d\varphi \right] \frac{M_p l^n}{EI}$$

なお、式(10a)および式(10b)の積分も式(9)に準じ、アーチを m 等分して近似的に求めることとした。

(3) 解法の手順

(i) まずデータとして μ , θ , d/l を与えて弾性解析を行なえば、中央矢 C の応力が最大であることが分るゆえ、初期降伏荷重 P_0 を初期降伏の条件 $|M_c/M_p| = 1 - |N_c/N_y|$ を用いて求める。

(ii) ついで荷重を $P_1 (> P_0)$ に増加させた状態に移行し、 P_1 を A' 点より移動させる。いま A' 点に P_1 が載荷するときの不静定量 H_A を式(4)より式(5), (6)および式(7)を併用する繰返し試算により算出する。

(iii) (ii) でえた収斂値を用いてたわみ δ を式(10)より算定する。

(iv) 以下 $k+1$, $k+2$, ..., B' 点 $\rightarrow A'$ 点の順に逐次荷重を移動させ、

(ii) と (iii) の操作を繰返す。

(v) さらに荷重を P_2 , P_3 , ... と逐次漸増させ、(iv) の操作を繰返し、ある断面の歪とが局部座屈発生時の限界歪 ϵ_{cr} に達するときを最終崩壊と見做し、計算を完了する。

以上の解法の手順を Flow Chart で示せば図-4のごとくである。

4. 結 語

本法によって繰返し移動荷重を受けるアーチの弾塑性挙動が歪硬化の影響をも考慮して解明されることとなったが、本研究の成果としては、

(1) 式(2)の判別式を用いて塑性履歴に属する係数 α および β を算定することにより、従来の繰返し荷重を受ける鋼構造物の弾塑性解析法⁵⁾より応力および歪分布の決定を容易ならしめたこと。

(2) 近似 M , N - ϕ , ϵ^* 関係式を解析的に誘導することにより、不静定量の算定と容易に可能ならしめたこと。

などが挙げられる。なお、本法によれば繰返し荷重を受ける曲線

部材または山形部材をもつラーメンの弾塑性解析も可能となり、かかる理論の多様性も本研究の成果として挙げることもできる。

参考文献

- 1) 橋本 吉雄: 変動くり返し荷重によるアーチの崩壊, 土木学会論文集, 第131号, 昭和41年7月
- 2) 山崎・石川・松隈: くり返し荷重を受ける連続ばりの弾塑性解析, 土木学会第23回年度学術講演会講演概要, 昭和43年10月
- 3) 山崎・石川: 円弧アーチの弾塑性解析, 土木学会論文集, 第158号, 昭和43年10月
- 4) 山崎・石川・松隈: くり返し荷重を受けるラーメンの弾塑性安定, 昭和43年度土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和44年2月
- 5) 橋本・羽倉: 繰返し荷重を受ける鉄骨断面の弾塑性解析に関する研究 第1, 2, 3, 4, 5報, 建築学会論報, 第117, 121, 122, 124, 133号, 昭和40.11, 41.3, 4, 6, 42.3

橋本・羽倉: 繰返し荷重を受ける鋼構造物の歪硬化モデルを用いた弾塑性解析, 建築学会論報, 第145号, 昭和43年3月

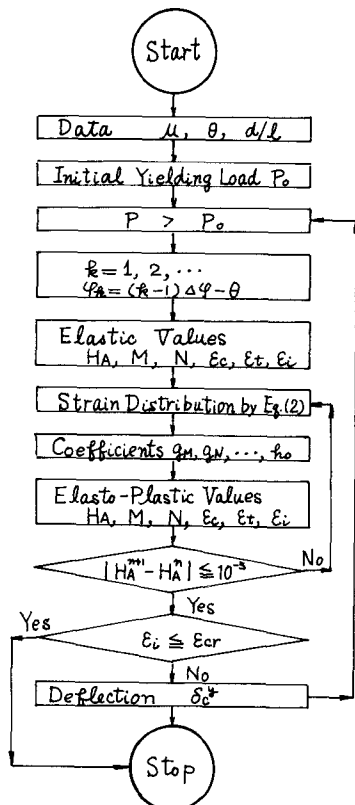


図 - 4