

1. 序

漸増荷重もしくは変動荷重を受けるはりの弾塑性曲げに関する既往研究は、数多く見受けられるが、そのほとんどが微小変形理論の範疇に属するものである。しかし、塑性時におけるはりのたわみ増加率は、弾性のそれと比べて著しく大であり、その厳密な解析は軸線の変化を考慮した有限変形理論^(1,2)に依らなければならぬ。

本研究は、任意の変動曲げモーメントと軸力の組合せ負荷⁽³⁾を受けるはりの弾塑性挙動に関する解析理論を確立するために、まず歪硬化を考慮したBilinear型の応力-歪履歴曲線に基づいてこの種負荷に対する断面応力ならびに歪の算定式を導き、次いで有限変形を考慮した弾塑性補正エネルギーを誘導してかかる分野における弾塑性補正エネルギー法の一般化を図ったものである。

2. 応力ならびに歪分布

一般にくり返し荷重を受ける鋼材の応力と歪の履歴曲線は、図-1のごとく表わされるゆえ、ここではこれを図-2に示すBilinear型のモデルで理想化する。すなわち、直線DA(あるいは直線OA)および直線BCは、それぞれ負荷および除荷に際してHookeの法則が成立する弾性域であり、そのときの応力は直線DAに関しては $\sigma/\sigma_y = \epsilon/\epsilon_y - \epsilon_a/\epsilon_y + \sigma_a/\sigma_y$ 、直線BCに関しては $\sigma/\sigma_y = \epsilon/\epsilon_y - \epsilon_b/\epsilon_y + \sigma_b/\sigma_y$ で与えられる。

一方、直線AB(あるいは直線AB)および直線CDは歪硬化の影響を考慮した塑性域であり、このときの応力はそれぞれ $\sigma/\sigma_y = \mu(\epsilon/\epsilon_y - \epsilon_{ay}/\epsilon_y) + \sigma_{ay}/\sigma_y$ および $\sigma/\sigma_y = \mu(\epsilon/\epsilon_y - \epsilon_{by}/\epsilon_y) + \sigma_{by}/\sigma_y$ で求められる。

よって総てのくり返し応力状態を包含する σ - ϵ 曲線は、歪 ϵ の1次式で次のごとく一般表示される。

$$\bar{\sigma} = \nu \bar{\epsilon} - \nu \bar{\epsilon}_x \quad \text{----- (1)}$$

ただし $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_y$, $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_y$, σ_y : 降伏応力, $\epsilon_y = \sigma_y/E$: 降伏歪, E : ヤング率,

$\sigma_{ay}, \epsilon_{ay}$: A点の応力歪, σ_b, ϵ_b : B点の応力歪, $\sigma_{by}, \epsilon_{by}$: C点の応力歪, σ_a, ϵ_a : D点の応力歪

また式(1)の係数 ν および $\bar{\epsilon}_x$ は、それぞれ表-1に示す内容となる。

さて、はりの断面の上縁および下縁の歪をそれぞれ ϵ_a および ϵ_b とし、平面保持の法則を仮定すれば、任意点 i の歪 ϵ_i は図-3より次式で与えられる。

$$\bar{\epsilon}_i = (1 - \bar{y}_i / \bar{y}_c) (\bar{\epsilon}_t) \quad \text{----- (2)}$$

ただし $\bar{y}_i = y_i/h$, $\bar{\epsilon}_t = \epsilon_t/\epsilon_y$, $\bar{\epsilon}_c = \epsilon_c/\epsilon_y$

よって任意点 i の応力は、式(1),(2)より

$$\bar{\sigma}_i = (\nu(1 - \bar{y}_i) - \nu \bar{y}_c) (\bar{\epsilon}_t) - (\nu \bar{\epsilon}_x) \quad \text{----- (3)}$$

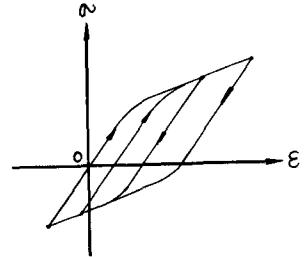


図-1

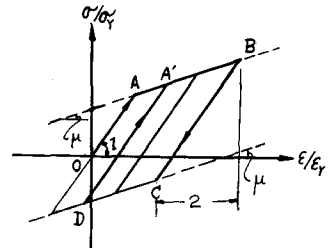


図-2

Step	Range	ν	$\bar{\epsilon}_x$
1	$\bar{\epsilon}_a < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_{ay}$	1	$\bar{\epsilon}_a - \bar{\sigma}_a$
2	$\bar{\epsilon}_{ay} < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_b$	μ	$\bar{\epsilon}_{ay} - \bar{\sigma}_{ay}/\mu$
3	$\bar{\epsilon}_{by} < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_b$	1	$\bar{\epsilon}_b - \bar{\sigma}_b$
4	$\bar{\epsilon}_a < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_{by}$	μ	$\bar{\epsilon}_{by} - \bar{\sigma}_{by}/\mu$
$\bar{\epsilon}_{ay} = \bar{\epsilon}_a + 2, \quad \bar{\epsilon}_{by} = \bar{\epsilon}_b - 2$ $\bar{\sigma}_{ay} = \bar{\sigma}_a + 2, \quad \bar{\sigma}_{by} = \bar{\sigma}_b - 2$			

表-1

式(3)より、全断面の応力が自動的に算定可能となるが、この場合歪 ϵ が表-1で定義された4StepのうちどのStepにあるかを判別し、式(3)の未知係数 $\bar{\epsilon}$ および定数 $\bar{\epsilon}_c$ を決定する必要があり、その判別操作を図-4に示した。

3. 曲率の算定式

任意の変動曲げモーメント M と軸力 N の組合せ負荷を受けるはりの断面に働く外力と内力の釣り合い式は、次の一般式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \sigma y dA_o \\ -\int \sigma y dA_o \end{bmatrix} \quad \text{----- (4)}$$

式(4)に式(3)を代入のうえ無次元化すれば

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha_o/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \nu \bar{\epsilon} dA_o/A_o & \int \nu \bar{\epsilon} dA_o/A_o \\ \alpha_o \int \nu \bar{\epsilon} (1-\bar{y}) dA_o/A_o & \alpha_o \int \nu \bar{\epsilon}^2 dA_o/A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_t \\ \bar{\epsilon}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int \nu \bar{\epsilon}_x dA_o/A_o \\ \int \nu \bar{\epsilon}_x dA_o/A_o \end{bmatrix} \quad \text{--- (5)}$$

ただし $\bar{M} = M/M_Y$, $\bar{N} = N/N_Y$, $M_Y = \sigma_Y S$, $N_Y = \sigma_Y A_o$, S : 断面係数
 A_o : 断面積, $\alpha_o = h N_Y / M_Y$

式(5)を変形して

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_t \\ \bar{\epsilon}_c \end{bmatrix} = (E) + (F) \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

ここに $(E) = (g)^{-1}(f)$, $(F) = (g)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha_o/2 \end{bmatrix}$, $(g) = \begin{bmatrix} \int \nu (1-\bar{y}) dA_o/A_o & \int \nu \bar{\epsilon} dA_o/A_o \\ \alpha_o \int \nu \bar{\epsilon} (1-\bar{y}) dA_o/A_o & \alpha_o \int \nu \bar{\epsilon}^2 dA_o/A_o \end{bmatrix}$
 $(f) = \begin{bmatrix} \int \nu \bar{\epsilon}_x dA_o/A_o \\ \int \nu \bar{\epsilon}_x dA_o/A_o \end{bmatrix}$

一方、曲率 ϕ および圆心点の歪 ϵ^o は、それぞれ図-3より $\phi = (\epsilon_t - \epsilon_c)/h$ および $\epsilon^o = (1-\alpha)\epsilon_t + \alpha\epsilon_c$ で与えられるゆえ、曲げのみが働くときの弾性限界時の曲率 ϕ_r , ϵ_r を用いて無次元化すれば、式(6)より次のごとくなる。

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \epsilon^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 1-\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_t \\ \bar{\epsilon}_c \end{bmatrix} = (G) + (H) \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \end{bmatrix} \quad \text{----- (7)}$$

ここに $(G) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 1-\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} (E)$, $(H) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 1-\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} (F)$, $\phi = \phi/\phi_r$, $\phi_r = \epsilon_r/\alpha_1 h$, $\epsilon^o = \epsilon^o/\epsilon_r$

α_1 : 純曲げに与る弾性限界時の中立軸より外縁までの最短距離を規定する無次元定数

α_2 : 圆心軸より下縁までの距離を規定する無次元定数

よって式(2),(3),(6)および式(7)を用いれば、任意の M および N が働く場合の応力、歪さらには ϕ , ϵ^o が算定可能となり、そのFlow Chartは図-5のごとくなる。

4. 弾塑性補正エネルギー

曲げモーメント M と軸力 N を受けて、はりABが図-6に示すごとく変形したと仮定すれば、一般に弾塑性曲げ補正エネルギー C および一般力 F

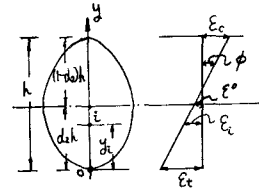


図-3

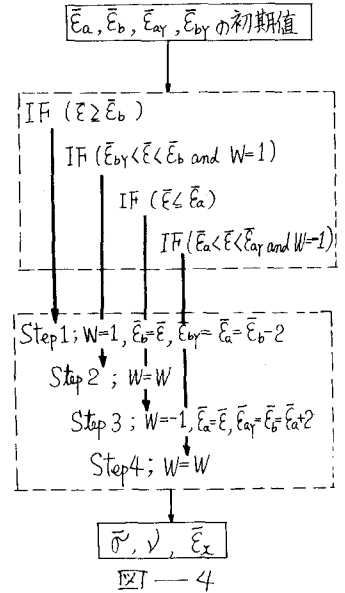


図-4

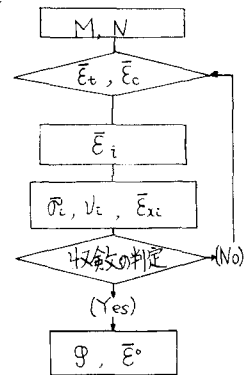


図-5

に対応する変形成分 u は、文献(1)よりそれぞれ次式で与えられる。

$$C = \int \int \phi(1+\varepsilon) dM \int ds + \int \int \varepsilon^0 dN \int ds - \int \theta \frac{dM}{ds} ds \quad \text{----- (8)}$$

$$u = \partial C / \partial F = \int \phi(1+\varepsilon) \frac{\partial M}{\partial F} ds + \int \varepsilon^0 \frac{\partial N}{\partial F} ds - \int \theta \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{dM}{ds} \right) ds \quad \text{----- (9)}$$

また、変形後の微小要素 $ds' = (1+\varepsilon)ds$ に作用力の釣り合い式は

$$\left. \begin{aligned} dQ + p(1+\varepsilon)ds \cos \theta &= 0 \\ dN + p(1+\varepsilon)ds \sin \theta &= 0 \\ dM - Q(1+\varepsilon)ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (10)}$$

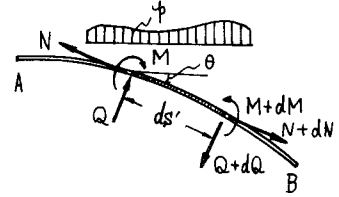


図 6

ただし、 Q :せん断力, p :鉛直分布荷重強度, θ :変形後の軸線と水平軸とのなす交角

この場合、はりの変形に関する交角 θ が未知変数であるため、式(10)を直接積分することが不可能となる。そこで解析を可能にするため、はりABを適当な数 N_0 に等分割し、各分割要素の諸元 $\phi, \varepsilon^0, \theta$ を単位として式(9),(10)を下記のごとく書き改める。

すなわち、いま分割要素 k ($k=1 \sim N_0$)の未知交角を θ_k とすれば、 θ_k の算定式が式(9)より下記のごとく求められる。

$$0 = \frac{\partial C}{\partial M_k} = \int \phi(1+\varepsilon) \frac{\partial M}{\partial M_k} ds - \int \theta \frac{\partial}{\partial M_k} \left(\frac{dM}{ds} \right) ds \quad \text{----- (11)}$$

式(11)を Simpson 公式を用いて変形すれば、

$$\frac{\lambda}{6} \sum_{j=1}^{N_0} \left\{ \phi_j(1+\varepsilon_j^0) \frac{\partial M_j}{\partial M_k} + (\phi_j + \phi_{j+1})(2+\varepsilon_j^0 + \varepsilon_{j+1}^0) \frac{\partial}{\partial M_k} \left(\frac{M_j + M_{j+1}}{2} \right) + \phi_{j+1}(1+\varepsilon_{j+1}^0) \frac{\partial M_{j+1}}{\partial M_k} \right\} - \frac{\partial}{\partial M_k} \sum_{j=1}^{N_0} \theta_j \frac{M_{j+1} - M_j}{\lambda} \lambda = 0$$

ただし、 λ :分割要素の長さ

上式を整理すれば、結局次式がえられる。

$$\theta_k = \theta_{k-1} - \frac{\lambda}{6} \left\{ 2\phi_k(1+\varepsilon_k^0) + (\phi_k + \phi_{k+1})(2+\varepsilon_k^0 + \varepsilon_{k+1}^0)/2 + (\phi_k + \phi_{k+1})(2+\varepsilon_k^0 + \varepsilon_{k-1}^0)/2 \right\}, (k=1 \sim N_0) \quad \text{----- (12)}$$

また式(10)は、部材要素 k に対して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{k+1} &= Q_k - p(1+\varepsilon_k^0)\lambda \cos \theta_k \\ N_{k+1} &= N_k - p(1+\varepsilon_k^0)\lambda \sin \theta_k \\ M_{k+1} &= M_k + Q_k(1+\varepsilon_k^0)\lambda \end{aligned} \right\}, (k=1 \sim N_0) \quad \text{----- (13)}$$

5. 計算例

図-7(a)のごとく一定軸力 N とくり返し集中荷重 P を受ける $h \times b$ の矩形断面片持はりの弾塑性解析を行えば以下の通りである。図-7(b)より、式(13)の釣り合い方程式は

$$\left. \begin{aligned} Q_{k+1} &= P_0 \cos \theta_k + N \sin \theta_k \\ N_{k+1} &= P_0 \sin \theta_k - N \cos \theta_k \\ M_{k+1} &= M_k + (P_0 \cos \theta_k + N \sin \theta_k)(1+\varepsilon_k^0)\lambda \end{aligned} \right\} (k=1 \sim N_0) \quad \text{----- (14)}$$

で与えられ、また境界条件は、 $M_{N_0+1} = 0, N_1 = 0, Q_1 = P$ 。

となる(図-7(b)参照)。

よって式(12)と式(14)を併用すれば、任意の変動荷重 P に対する未知数 θ_k および M_k が、くり返し試算によって容易に算定されることになる。また自由端のためは、式(9)より次のように求められる。

$$s_c = \int \phi(1+\varepsilon)(dM/dP_0) ds$$

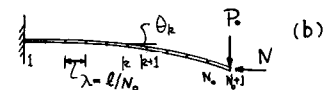
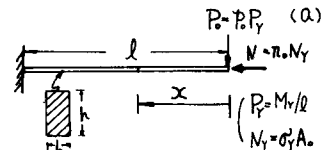


図 7

§ 7

$$S_c = \frac{1}{3} \{ f_2 + f_{N_0+1} + 4(f_2 + f_4 + \dots + f_{N_0}) + 2(f_3 + f_5 + \dots + f_{N_0-1}) \}$$

ただし

$$f_j = \phi_j (1 + \varepsilon_j^0) g_j, \quad g_j = \sum_{k=1}^{N_0} (1 + \varepsilon_k^0) \cos \theta_k$$

以上から 断面諸量 $h = 10\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $l = 100\text{cm}$ で, $\sigma_f/E = 10^{-3}$, $\mu = 0.005$ の片持ばりを対象に選り, $n_0 = 0, 0.1, 0.2$ で $p_0 = 0 \sim 1.5$ ($+n_0$) の漸増荷重 おし $n_0 = 0.0$ で $p_0 = 0 \sim 1.5 \sim -1.5 \sim 1.5$ のくり返し荷重 に対する 荷重-たわみ曲線を図-8のFlow Chartを用いて求め れば, それぞれ図-9および図-10のごとくなる。ただし分割数は $N_0 = 10$ とした。

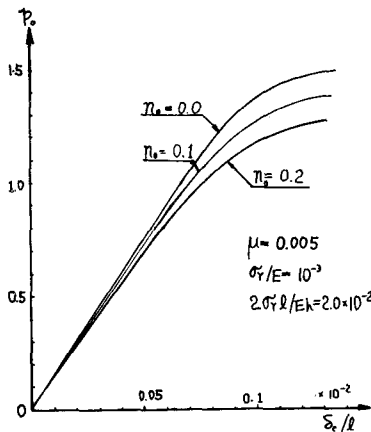


図-9

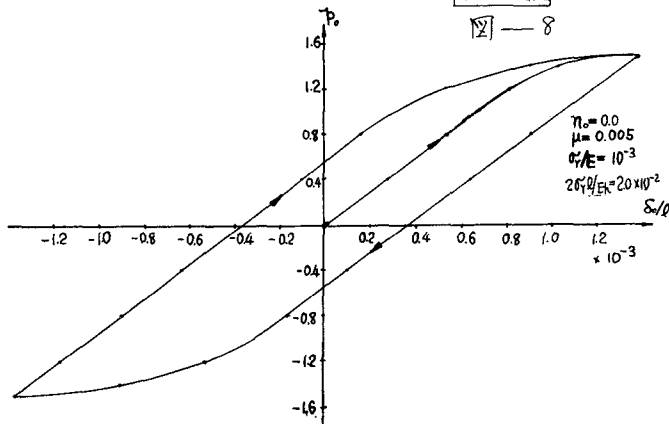


図-10

6. 結び

本論文は、任意の変動曲げモーメントと軸力を受けるばりの弾塑性有限変形問題に対する理論解を提示したもので、手法として普遍性を有する補正エネルギー法を採用した。式(1), (10)は形状任意の断面に適用でき、かつ実態に即した図-11のごとき残留応力を有するH型钢⁵⁾なども応用でき、さらに式(9), (13)は適用範囲が極めて広く、連続はりやラ-メンなどに拡張応用が可能であるなど、本法は一般性に富む厳密解法であるといえる。

なお数値計算には客大のFACOM 270-20/30を使用した。

(参考文献)

- 1) 山崎太田; アルミニウム片持ばりの弾塑性有限変形について, 土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和43年2月
- 2) C. Oron; Complementary Energy Concept for Large Deformations, Proceedings of the A.S.C.E., ST.1, Feb. 1967
- 3) 藤本羽倉; 繰返し荷重をうける鉄骨断面の弾塑性解析に関する研究, 建築学会論報, 第117号, 昭和40年11月
- 4) 山崎太田, 石川松隈; くり返し荷重を受けるラ-メンの弾塑性解析に関する研究, 九州大学工学集報, 第42巻, 第3号, 昭和44年

- 5) L.K. Robert, L.K. Edmond and S.B. Kaminsky: Plastic Deformation of Wide-Flange Beam-Columns, Trans. of the A.S.C.E. Vol. 120, 1955

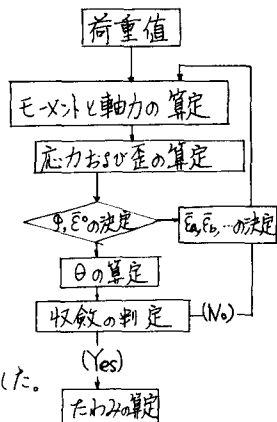


図-8

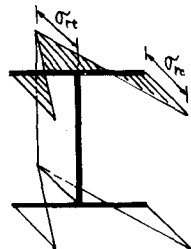


図-11