

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 〇黒木健実

宮崎大学工学部 〃 太田俊昭

1. 序言

骨組構造物が耐力以上の動的荷重を受け、力学的にも幾何学的にも非線形挙動を呈する場合、その厳密な解析は当然有限変形理論に依るなければならない。

本研究は、多質点系で置換した片持ばりの有限変形理論に基づく動的弾塑性解法を提示したもので、その骨子は、まず補正エネルギー法により曲率の算定式を誘導し、次いで分割点の集中質量の運動方程式より導かれるたわみ-曲げモーメントの関係式と Bi-linear 型の $M-\phi$ 近似履歴曲線²⁾とを併用して、耐力以上の動的荷重を受ける片持ばりの変形挙動を追跡解明しうるごとくしたものである。

2. 理論式の誘導

いま、任意時刻における片持ばりの微小要素が 動的荷重を受けて図-1に示すごとく変形したものと仮定すれば、この微小要素 dS に貯えられる曲げ補正エネルギーは定義より一般に次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} dC &= M\left(\theta + \frac{\phi dS}{2}\right) + (M+dM)\left(-\theta + \frac{\phi dS}{2}\right) \\ &\quad - (M\phi - \int \phi dM) dS \\ &= \int \phi dM dS - \theta dM \end{aligned} \quad (1)$$

よって長さ l の部材に貯えられる補正エネルギーは

$$C = \int_0^l \int \phi dM dS - \int \theta dM \quad (2)$$

ただし ϕ : 曲率, M : 曲げモーメント, θ : 部材角
さて、図-2(a)の片持ばりを解析するに当り、これを図-2(b)のごとく適当な数 j に等分割すれば、式(2)より分割部材 i ($i=1, 2, \dots, j$) の補正エネルギー C_i が下記のごとく求められる。

$$C_i = \int_0^{\lambda} \int_{M_{i-1}}^{M_i} \phi dM dS - \int_{M_{i-1}}^{M_i} \theta dM \quad (3)$$

ただし M_{i-1} , M_i はそれぞれ分割点 $i-1$, i における曲げモーメントである。

片持ばり全体の補正エネルギーは $C = \sum C_i$ で与えられるゆえ、これに変分原理を適用すれば所要の曲率の算定式が式(4)のごとく導かれる。すなわち、

$$\frac{\partial C}{\partial M_i} = \frac{\lambda}{6} (\phi_{i-1} + 4\phi_i + \phi_{i+1}) + \theta_{i+1} - \theta_i = 0, \quad (i=0, 1, 2, \dots, j-1)$$

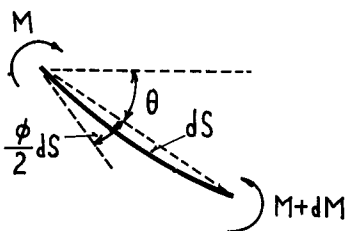
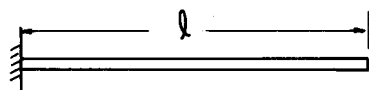
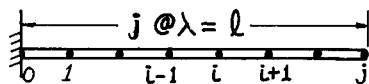


図-1



(a)



(b)

図-2

よって

$$\phi_{i-1} + 4\phi_i + \phi_{i+1} = -\frac{b}{\lambda}(\theta_{i+1} - \theta_i), \quad (i=0, 1, 2, \dots, j-1) \quad \text{ただし } \phi_j = \phi_i, \phi_j = 0 \quad (4)$$

ここに θ_{i+1}, θ_i はそれぞれたねみちを用いて次の式で求められる。

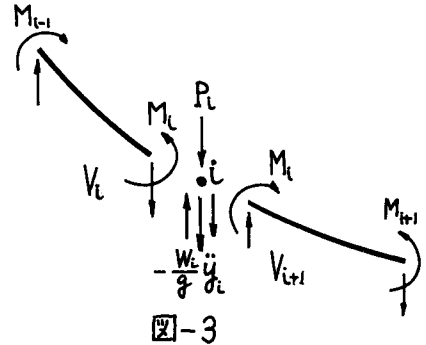
$$\theta_{i+1} = \sin^{-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda}, \quad \theta_i = \sin^{-1} \frac{y_i - y_{i-1}}{\lambda} \quad (5)$$

ここで各分割部材の質量をそれぞれ隣接する分割点に集中させ、D'Alembertの原理より集中質量に
 働く諸力の釣合式を求めれば、図-3より点の集中質
 量に関する運動方程式が次のごとくえられる。

$$-\frac{W_i}{g} \ddot{y}_i - V_i + V_{i+1} + P_i = 0 \quad (6)$$

ただし W_i/g : 点の集中質量, P_i : 点に作用する動的荷重

いま、微小な時間さみ τ をとすれば、分割点の
 加速度が $\ddot{y}_i(t) = \frac{y_i(t-\tau) - 2y_i(t) + y_i(t+\tau)}{\tau^2}$



と表わされるゆえ、結局式(6)は次のごとく書き直される。

$$y_i(t+\tau) = 2y_i(t) - y_i(t-\tau) + \tau^2 \ddot{y}_i(t), \quad \text{ただし } \ddot{y}_i(t) = \frac{g}{W_i} \{V_{i+1}(t) - V_i(t) + P_i(t)\} \quad (7)$$

また式(6)の運動方程式に初期条件を適用して時刻 $t=\tau$ におけるたねみを求めれば次式をうる。

$$y_i(\tau) = y_i(0) + \tau \dot{y}_i(0) + \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{y}_i(0), \quad \text{ただし } \ddot{y}_i(0) = \frac{g}{W_i} \{V_{i+1}(0) - V_i(0) + P_i(0)\} \quad (8)$$

一方、分割点のモーメントの釣合式よりせん断力 V_i と曲げモーメント M_{i-1}, M_i との関係式が次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} V_i &= \frac{M_i - M_{i-1}}{\lambda \cos \theta_i} \\ \text{同様に} & \quad V_{i+1} = \frac{M_{i+1} - M_i}{\lambda \cos \theta_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

以上にて変形に関する基本式が式(4), (5)で、力に関するそれが式(7), (8), (9)で誘導されたが、次に両者を関係づける $M-\phi$ 履歴曲線²⁾について考察すれば以下のごとくである。

まず、片持ばりの応力-ひずみ曲線を、弾性域では Hooke の法則 $\sigma = E\varepsilon$ に従う直線で、さらに進んでひずみ硬化域をも考慮した塑性域では任意の n 次関数 $\sigma = E\varepsilon_p (\varepsilon/\varepsilon_p)^n$ で与えられる曲線で定義し、断面を $2h \times b$ の矩形と仮定すれば、曲げモーメント-曲率曲線は式(10)で、単位長さ当りの断面に貯えられる弾塑性曲げ補正エネルギー C_B は式(11)で表わされる。

$$\text{弾性応力状態:} \quad M = M_y \varphi \quad (10-1)$$

$$\text{弾塑性応力状態: } M = M_y \left\{ \frac{1-n}{2n+1} \varphi^{-2} + \frac{3n}{2n+1} \varphi^{\frac{1}{n}} \right\} \quad (10-2)$$

$$C_B = \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ 1 + \frac{4(1-n)}{2n+1} (\varphi^{-1} - 1) + \frac{2(1-n)}{(n+1)(2n+1)} (\varphi^{1+\frac{1}{n}} - 1) \right\} \quad (11)$$

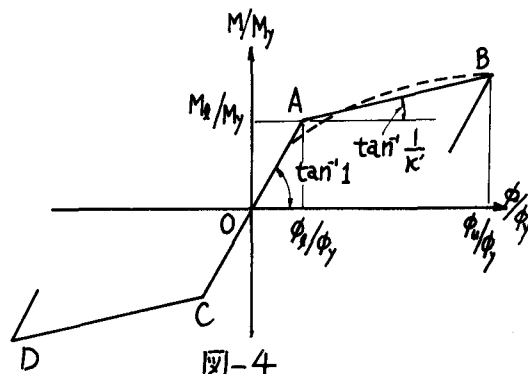
ただし M_y : 降伏曲げモーメント, $\varphi = \phi/\phi_y$, ϕ_y : 降伏曲率, EI : 曲げ剛性

ここで解析を簡易化するため, 式(10)の M を
図4に示すごとく2本の $M/M_y - \phi/\phi_y$ 近似直線
で置換すれば, 式(11)は次のごとき $m (=M/M_y)$
の2次式で表わすことができる。

$$C_B = \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ m^2 + K(m - m_0)^2 \right\} \quad (12)$$

ただし $K = K' - 1$, $m_0 = M_0/M_y$: 無次元化した
臨界曲げモーメント

よって, $M/M_y - \phi/\phi_y$ 近似直線の勾配を示
す K' および臨界曲げモーメント M_0 はエネルギ
ーの等置条件および幾何学的条件より決定さ
れ, それぞれ次のごとくなる。



$$K' = \frac{\phi_u/\phi_y - \phi_0/\phi_y}{M_u/M_y - M_0/M_y}, \quad \phi_0/\phi_y = \frac{M_u/M_y \cdot \phi_u/\phi_y - 1 - A_0}{\phi_u/\phi_y - M_u/M_y} \quad (13)$$

$$\text{ただし } M_u/M_y = (1-n)/(2n+1) \cdot (\phi_u/\phi_y)^{-2} + 3n(\phi_u/\phi_y)/(2n+1)$$

$$A_0 = 4(1-n) \left\{ (\phi_0/\phi_y)^{-1} - 1 \right\} / (2n+1) + 2(1-n) \left\{ (\phi_u/\phi_y)^{1+\frac{1}{n}} - 1 \right\} / (n+1)(2n+1)$$

ここに式(13)の ϕ_u は平面保持の仮定より $\phi_u/\phi_y = \epsilon_u/\epsilon_y$ で求められるゆえ, 結局材料の力学的性質であ
る ϵ_u および n を与えれば, K および M_0, M_u が算定されることになる。

次に, 上記諸導の $M - \phi$ 近似直線を用いて弾性・塑性の判別式³⁾および曲げモーメント算定式を求め
れば以下のごとくである。

すなわち, 任意時刻 t における曲率を $\phi(t)$, 弾性曲率を $\phi_e^e(t)$, 塑性曲率を $\phi_p^p(t)$, 1 step 前の時刻 $t - \tau$
における塑性曲率を $\phi_p^p(t - \tau)$ としに時刻 $t - \tau$ から t までの微小時間 τ における塑性曲率の増加量を
 $\Delta \phi_p^p(t - \tau)$ とおけば, 弾塑性応力状態においては $M - \phi$ 曲線の幾何学的関係より式(14)のごとき判別式がえ
られ, このとき曲げモーメントは式(15), 塑性曲率は式(16)より算出されることになる。

$$\left| EI \left\{ \phi(t) \left(1 - \frac{1}{K'} \right) - \phi_e^e(t - \tau) \right\} \right| < M_y \left(1 - \frac{1}{K'} \right) \quad (14)$$

$$M_i(t) = EI \left\{ \phi_i(t) - \phi_i^p(t - \tau) \right\} \quad (15)$$

$$\phi_i^p(t) = \phi_i^p(t - \tau), \quad \Delta \phi_i^p(t - \tau) = 0 \quad (16)$$

一方、弾塑性応力状態においては2つの場合が考えられ、 $M-\phi$ 曲線がAB上にある場合の判別式および曲げモーメントはそれぞれ式(17), (18)で、 $M-\phi$ 曲線がCD上にある場合の判別式および曲げモーメントはそれぞれ式(19), (20)で与えられることとなる(図4参照)

$$EI\left\{\phi_c(t)\left(1-\frac{1}{k'}\right)-\phi_c^p(t-t_c)\right\} \geq M_y\left(1-\frac{1}{k'}\right) \quad (17)$$

$$M_i(t) = M_y\left(1-\frac{1}{k'}\right) + \frac{EI}{k'} \phi_c(t) \quad (18)$$

$$EI\left\{\phi_c(t)\left(1-\frac{1}{k'}\right)-\phi_c^p(t-t_c)\right\} \leq -M_y\left(1-\frac{1}{k'}\right) \quad (19)$$

$$M_i(t) = -M_y\left(1-\frac{1}{k'}\right) + \frac{EI}{k'} \phi_c(t) \quad (20)$$

塑性曲率に関しては両者の場合とも次式が成立する。

$$\Delta\phi_c^p(t-t_c) = \frac{k'-1}{EI} \{M_i(t) - M_i(t-t_c)\}, \quad \phi_c^p(t) = \phi_c^p(t-t_c) + \Delta\phi_c^p(t-t_c) \quad (21)$$

上記誘導諸式を用いれば図-2(4)の片持ばりの動的弾塑性解析が可能となり、その解析手法のフローチャートを示せば図-5のごとくである。

3. 計算例

自由端に集中質量を有する片持ばりを1質点系で置換し、その先端に初速度 v_0 を与えてたわみを求めれば、図-6の実験結果をうる。破線は微小変形理論³⁾による解である。ここに

$$EI = 1.75 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2, \quad W = 1.0 \text{ kg}, \quad l = 22.0 \text{ cm}$$

$$M_y = 600.0 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad k' = 4.0$$

4. 結果

本研究は、滑組構造物の動的有限変形に関する弾塑性解析理論の確立を企図したもので、ここでは対象を片持ばりの単独曲げ問題に限定したが、軸力と曲げの組み合わせ負荷を受ける連続ばりやラーメンの解析にも同種解法が適用可能であり、これらの解析結果については逐次報告の予定である。

なお、数値計算には本学の電子計算機OKITAC-5090Hを使用した。

参考文献

- 1) 山崎太田 俊彦：有限変形を考慮したはりの弾塑性解析，第23回土木学会年次学術講演会講演概要，昭和43年10月
- 2) 山崎太田：アルミニウム片持ばりの弾塑性有限変形について，昭和43年度土木学会西部支部研究発表会論文集，昭和44年2月
- 3) 山崎 黒木：はりの動的弾塑性解析，九州工学集報，第40巻第6号，昭和43年1月

