

室蘭工業大学 正員 能町純雄 同 松岡健一 学生員 ○佐渡公明

1. まえがき

浅い、くぼみのある半無限平面内の任意位置に、集中荷重が作用した場合の複素応力関数は、W.E. Warrenによって求められている。本論文では、この応力関数を用い、自重を考慮した場合の半無限弾性体の応力解析を試みた。くぼみの曲率半径は、写像関数に含まれるパラメーターにより、0から ∞ まで任意に取り得る。突起部がある場合は、突起部を荷重曲線に置き換えれば、同様に解析できる。

2. くぼみ曲線の等角写像

浅い、くぼみのある半無限平面の幾何学的形状を、Fig. 1の複素平面 Z に示す。曲線上の垂直応力 σ_z , σ_y , せん断応力 τ_{zy} と同図に示す。写像関数

$$Z = \omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{b}{\zeta - i} \right), \quad b \geq -1 \quad (1)$$

により、 Z 平面のくぼみ曲線を複素平面 ζ ($\zeta = \xi + i\eta$) の実軸上に等角写像する。

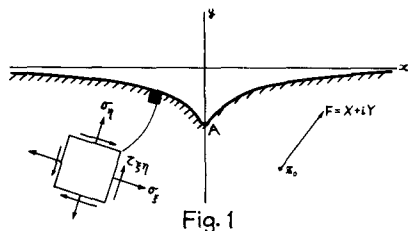


Fig. 1

くぼみの深さは、 bc で、底面の曲率半径 ρ は、 $\rho = C(1+b)^2/2b \dots (2)$ である。

ここで、 C は長さの単位、 b はパラメーターで、この値により、くぼみの形状が変化する。即ち、 $b = -1$ のとき $\rho = 0$ 、 $b = 0$ のとき $\rho = \infty$ 、 $b > 0$ のとき突起形状となる。

3. 複素応力関数

複素応力関数、 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ は、 $\text{Im } \zeta < 0$ で正則、 $\zeta = \infty$ で0となる。曲線座標による応力式は次式となる。

$$\sigma_z + \sigma_y = 2[\phi(\zeta) + \bar{\phi}(\bar{\zeta})], \quad \sigma_y - \sigma_z + 2i\tau_{zy} = \frac{2}{\omega'(\zeta)} [\bar{\omega}(\bar{\zeta})\phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\psi(\zeta)] \quad (3)$$

$$\text{両式を加えて} \quad \sigma_y + i\tau_{zy} = \phi(\zeta) + \bar{\phi}(\bar{\zeta}) + \frac{1}{\omega'(\zeta)} [\bar{\omega}(\bar{\zeta})\phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\psi(\zeta)] \quad (4)$$

Z 平面上の任意点 Z_0 に作用する、重力 $F = X + iY$ を考える。密度を γ とすれば $F = \gamma C(\nu + i)$ となる。

ζ 平面上では、 $F = \frac{bC\gamma}{2} (i\nu - 1) \left(\frac{1}{\zeta + i} - \frac{1}{\zeta - i} \right) + C\gamma(\nu + i)\eta$

くぼみ表面($\zeta = t$)に、 F が作用する場合は、 $F(t) = bc\gamma(\nu + i)/(t^2 + 1)$ (5)

W.E. Warrenによれば、この時の応力関数は、

$$\phi_0(\zeta) = \frac{(X - iY)}{2\pi C[(\zeta - i)^2 - b]} \cdot \frac{b(4+b)}{2(2+b)(t-i)} - \frac{(X + iY)}{2\pi C[(\zeta - i)^2 - b]} \left\{ \frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta - t)} + \frac{b^2}{2(2+b)(t+i)} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) = & \frac{(\zeta - i)^2(X - iY)}{2\pi C[(\zeta - i)^2 - b]} \left\{ \frac{1}{(\zeta - t)} + \frac{b[2(\zeta - i)(\zeta + i) + b\zeta(\zeta - 3i) + b^2]}{(b+2)(t-i)[(\zeta - i)^2 - b]^2} \right\} \\ & - \frac{(\zeta - i)^2(X + iY)}{2\pi C[(\zeta - i)^2 - b]} \left\{ \frac{t(\zeta - i)^2}{(\zeta - t)^2[(\zeta - i)^2 - b]} + \frac{2b\zeta(\zeta - i)}{(\zeta - t)[(\zeta - i)^2 - b]^2} - \frac{2b^2(\zeta - i)}{(\zeta - t)^2[(\zeta - i)^2 - b]^2} \right. \\ & \left. + \frac{2b(\zeta - i)^2}{(2+b)(t+i)(\zeta - t)^2[(\zeta - i)^2 - b]} + \frac{3ib^2}{(2+b)(t+i)[(\zeta - i)^2 - b]^2} \right\} \end{aligned}$$

<次頁に続く>

$$+ \frac{b^2(\zeta-i) \left[\zeta^3 - 3i\zeta^2 + \zeta + 5i + b(\zeta+3i) \right]}{(2+b)(t+i)(\zeta-t)^2 \left[(\zeta-i)^2 - b \right]^2} \left\} \quad (7)$$

(6), (7)式を(3)式に代入して

$$\sigma_{\eta 0} + \sigma_{\xi 0} = \frac{2}{\pi c} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(X-iY)}{[(\zeta-i)^2 - b]} \cdot \frac{b(4+b)}{2(2+b)(t-i)} - \frac{(X+iY)}{[(\zeta-i)^2 - b]} \left[\frac{(\zeta-i)^2}{(\zeta-t)} + \frac{b^2}{2(2+b)(t+i)} \right] \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta 0} - \sigma_{\xi 0} + 2i\tau_{\xi\eta 0} &= \frac{(\bar{\zeta}+i)^2(\zeta-i)}{\pi c [(\bar{\zeta}+i)^2 - b][(\zeta-i)^2 - b]^2} \left\{ \frac{[\bar{\zeta}(\bar{\zeta}+i)+b]}{(\bar{\zeta}+i)} \left\{ (X+iY) \left[\frac{(\zeta-i)^3 + b(\zeta-2t+i)}{(\zeta-t)^2} + \frac{b^2}{(2+b)(t+i)} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{b(4+b)(X-iY)}{(2+b)(t-i)} \right\} + (X-iY) \left\{ \frac{[(\zeta-i)^2 - b]^2}{(\zeta-t)(\zeta-i)} + \frac{b[2(\zeta-i)(\zeta+i) + b\zeta(\zeta-3i) + b^2]}{(2+b)(t-i)(\zeta-i)} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. - (X+iY) \left\{ \frac{t(\zeta-i)[(\zeta-i)^2 - b] - 2b^2}{(\zeta-t)^2} + \frac{2b\zeta}{(\zeta-t)} + \frac{3ib^2}{(2+b)(t+i)} + \frac{b[2(\zeta-i)^3 + b(\zeta^3 - 3i\zeta^2 - \zeta + 7i) + b^2(\zeta+3i)]}{(2+b)(t+i)(\zeta-t)^2} \right\} \right\} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

4. 重力場における曲線座標による応力成分

$y=0$ なる半無限平面は、(5)式による自重を $y=0$ の面から、くぼみ表面に致す範囲に含んでいる。

この範囲内の自重の影響を除くため、(6), (7)式を $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると、

$$\phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\zeta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\zeta) \operatorname{Re} [\omega'(t)] dt \quad (10)$$

$$\psi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\zeta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\zeta) \operatorname{Re} [\omega'(t)] dt \quad (11)$$

$$\text{ここで、} \operatorname{Re} [\omega'(t)] dt = c \left\{ 1 - \frac{b(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \right\} dt$$

(10), (11)を(3)に代入し、重ね合わせの原理により、

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = (1+\nu)\gamma y - 4 \operatorname{Re} \phi(\zeta) \quad (12)$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = \frac{\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} (1-\nu)\gamma y - \frac{2}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \left[\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \psi(\zeta) \right] \quad (13)$$

この両式より、重力場における、くぼみのある半無限弾性体の垂直応力、せん断応力は求まる。

(12), (13)式の計算結果は、非常に長い式となり、紙面の都合上省略する。

今、 $\nu=0$ と仮定して、 $\zeta=0$ に対応する最もくぼんだ点A (Fig 1, 参照)の応力は、次式となる。

$$\sigma_{\xi}|_{\zeta=0} = bc\gamma \left(1 + \frac{b}{1+b} \right), \quad -1 < b < 0$$

尚、くぼみの周りの応力集中の様子は、 ν, b を変化させて、後日、図表で示す。

以上(1)の写像関数を用いて、半無限平面に変換出来る場合について、重力場における応力解析をした。

更に一般的な表面形状の弾性体の場合の応力解析は、適当な写像関数を見出し得るか否かによる。

従って、本論文は、特殊な場合についてではあるが、土質力学、地球物理学の観点からは、興味深い問題である。

[参考文献] 1. Muskhelishvili, N. I. : Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Third edition, 1953.

2. Timoshenko, S and Goodier, J. N. (1951) Theory of Elasticity, Second edition.