

空蘭工業大学

正員 能町 純雄 松岡 健一

学生員 ○吉岡 迪

1. まえがき

新板理論においては細長い矩形板の歪は短辺方向で平面応力状態にある。応力分布も直線と仮定してこれらの要素矩形板を組合わせることは、複雑な構造物の有効な解法手段である。本論文はこれを軸対称応力分布に適用して、内部に変位を生じせしめた際の半無限多層体の問題に工学的な解決を与えたものである。即ち、 n 層体が半無限弾性体に乗っている場合を想定し、第 n 番目の層について歪を厚さ方向の直線分布と仮定した基本式を求め、各層間の力のつりあいと適合条件によって層間の変位と法線応力のハンケル変換の差分方程式を誘導し、それらと任意の一層間に加えた放物線変位のハンケル変換式から成る連立方程式を解き各層の応力及び変位を求める。

2. 基本連立方程式

いま $i-1$, i 界面で与えられる第 i 層についてa) 半径方向の変位は平面保持を考慮して深さ方向(z 方向)に一次変化とする。

b) 深さ方向の歪はテーラー展開で第2項までとって深さ方向に一次変化とする。

上記の仮定をもとに力のつりあい方程式とフックの法則より次の4つの基本連立方程式が求められる

$$D'(w_{i-1}+w_i)\frac{h_i}{2} = \frac{1}{G_i}(\dot{S}_{i-1}-\dot{S}_i) + D(u_{i-1}-u_i) - \left[\frac{D'(\dot{S}_{i-1}-\dot{S}_i)}{2G_i+\lambda_i} + \alpha_i \left\{ D'D(u_i-u_{i-1}) \right\} \right] \frac{h_i^2}{12}.$$

$$D(\bar{T}_{i-1})h_i = \beta_i G_i \left\{ \frac{h_i^2}{3} DL(u_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6} DL(u_i) \right\} + \alpha_i \left\{ \frac{h_i^2}{3} D\left(\frac{\partial \dot{S}_{i-1}}{\partial r}\right) + \frac{h_i^2}{6} D\left(\frac{\partial \dot{S}_i}{\partial r}\right) \right\} + \dot{S}_{i-1} - \dot{S}_i.$$

$$D(\bar{T}_{i-1})h_i = -\beta_i G_i \left\{ \frac{h_i^2}{6} DL(u_{i-1}) + \frac{h_i^2}{3} DL(u_i) \right\} - \alpha_i \left\{ \frac{h_i^2}{6} D\left(\frac{\partial \dot{S}_{i-1}}{\partial r}\right) + \frac{h_i^2}{3} D\left(\frac{\partial \dot{S}_i}{\partial r}\right) \right\} + \dot{S}_{i-1} - \dot{S}_i.$$

$$w_i - w_{i-1} = \frac{h_i}{2} \left[\frac{\dot{S}_{i-1} + \dot{S}_i}{2G_i + \lambda_i} - \alpha_i \left\{ D(u_{i-1}) + D(u_i) \right\} \right].$$

u, w, S, T はそれぞれ層境界における半径方向変位、深さ方向変位、深さ方向応力、せん断力である。又、 h_i は層厚、 α, β は係数、 D, D', L は微分演算子である。尚、これらの式の誘導過程については文末に挙げた参考文献(2, 3)を参照されし。連立方程式の解法手段としてハンケル変換を用いた。未知数 u, w, S, T に関するハンケル変換及びハンケル逆変換はそれぞれ

$$U = \int_0^\infty r u J_0(\xi r) dr, \quad W = \int_0^\infty r w J_0(\xi r) dr, \quad S = \int_0^\infty r S J_0(\xi r) dr, \quad T = \int_0^\infty r T J_1(\xi r) dr.$$

$$u = \int_0^\infty \xi U J_0(\xi r) d\xi, \quad w = \int_0^\infty \xi W J_0(\xi r) d\xi, \quad S = \int_0^\infty \xi S J_0(\xi r) d\xi, \quad T = \int_0^\infty \xi T J_1(\xi r) d\xi.$$

先の連立方程式にハンケル変換をほどこせば

$$\left(\frac{h_i \xi}{2} - \alpha_i \frac{h_i^3 \xi^3}{12} \right) U_{i-1} - \left(\frac{h_i \xi}{2} - \alpha_i \frac{h_i^3 \xi^3}{12} \right) U_i + \frac{h_i^2 \xi^2}{2} W_{i-1} + \frac{h_i^2 \xi^2}{2} W_i = - \left\{ \frac{h_i}{G_i} + \frac{h_i^3 \xi^2}{12(2G_i + \lambda_i)} \right\} S_{i-1} + \left\{ \frac{h_i}{G_i} + \frac{h_i^3 \xi^2}{12(2G_i + \lambda_i)} \right\} S_i. \quad (1)$$

$$\frac{h_i^2}{6} \xi T_{i-1,2} + \beta_i \frac{h_i^3}{3} \xi U_{i-1} + \alpha_i \frac{h_i^3}{6} \xi^2 U_i = -\frac{h_i}{G_i} \left(\alpha_i \frac{h_i^2}{3} \xi^2 - 1 \right) S_{i-1} - \frac{h_i}{G_i} \left(\alpha_i \frac{h_i^2}{6} \xi^2 + 1 \right) S_i. \quad (2)$$

$$\frac{h_i^2}{6} \xi T_{i-1,1} - \beta_i \frac{h_i^3}{6} \xi^2 U_{i-1} - \beta_i \frac{h_i^3}{3} \xi^2 U_i = \frac{h_i}{G_i} \left(\alpha_i \frac{h_i^2}{6} \xi^2 + 1 \right) S_{i-1} + \frac{h_i}{G_i} \left(\alpha_i \frac{h_i^2}{3} \xi^2 - 1 \right) S_i. \quad (3)$$

$$\alpha_i \frac{h_i}{2} \xi U_{i-1} + \alpha_i \frac{h_i}{2} \xi U_i - W_{i-1} + W_i = -\frac{h_i}{2(2G_i + \lambda_i)} S_{i-1} + \frac{h_i}{2(2G_i + \lambda_i)} S_i. \quad (4)$$

3. 内部変位も生じた多層体の解析

各層間の力のつりあい式 $T_{i-1,1} + T_{i,1} = 0$ に(2)(3)式を代入してせん断力を消去する。境界条件を(5)として、半無限多層体上に n 層が載った場合の方程式を導けば、上記の操作により n 個、(1)、(4)式がそれぞれ n 個存在し、これに任意の一層間に変位を生ぜしめた場合の関係式(6)が加わって都合 $3n+4$ 個となる。(6)式は $i+1$ 層上端の変位 $W_{i+1,1}$ と i 層下端の変位 $W_{i,2}$ との差が $f(r) = 0$ ($r > 0$)

$$T_0 = S_0 = 0.$$

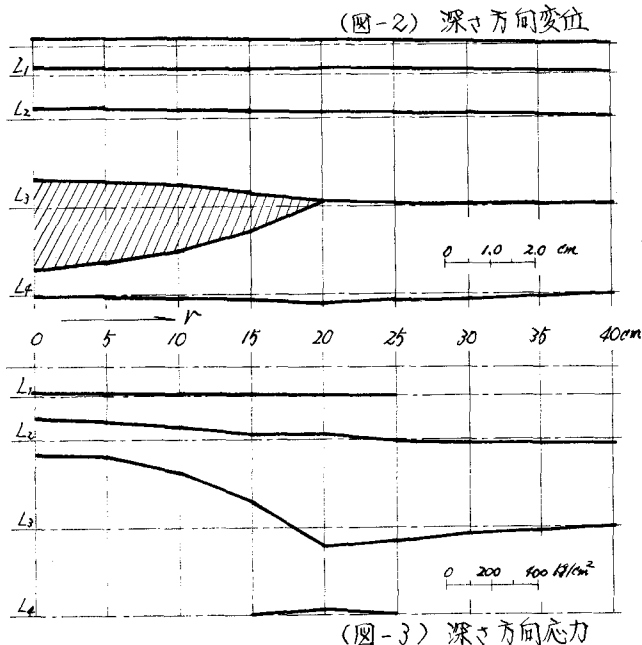
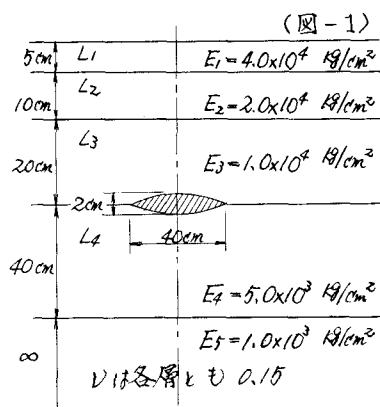
$$S_n = -2G_{n+1} \xi \left\{ \frac{2(1-\nu_{n+1})}{3-4\nu_{n+1}} W_n + \frac{1-2\nu_{n+1}}{3-4\nu_{n+1}} U_n \right\}, \quad T_n = -2G_{n+1} \xi \left\{ \frac{1-2\nu_{n+1}}{3-4\nu_{n+1}} W_n + \frac{2(1-\nu_{n+1})}{3-4\nu_{n+1}} U_n \right\}. \quad (5)$$

$$W_{i+1,1} - W_{i,2} = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\xi r) dr = \frac{4a}{\xi^3} J_1(\xi a) - \frac{2a^2}{\xi^2} J_0(\xi a). \quad (6)$$

$f(r) = (a^2 - r^2)$ ($0 < r < a$) となる関数 $f(r)$ に等しいことを示している。これに対し未知数は S , U がそれぞれ $n+1$, W が $n+2$ あり方程式数と一致する。

4. 計算例

図-1 に示す5層体の3、4層間に変位 $f(r) = (20^2 - r^2)/200$ cm を与えた場合の深さ方向応力及び深さ方向変位は右図のごとし。



参考文献

- 1) IAN. N. SNEDDON "FOURIER TRANSFORMS" MCGRAW-HILL 1951
- 2) 能町他 "多層体の軸対称応力問題の一解法" 土木学会, 年次学術講演会講演概要 第I部同 1968
- 3) 能町他 "多層体の圧力分布に関する一解法" 土質工学会北海道支部, 技術報告資料 第9号