

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

学生員 後藤恵之輔

1. 序 無限板が熱絶縁された任意形孔の存在により引起されるこう乱を除いて一様な温度分布のもとに在るとき、板内に熱応力が生ずることは周知のとおりである。かかる熱応力問題に関しては既に Deresiewicz¹⁾ および竹内・野田氏²⁾ の研究があるが、いずれも写像函数として Schwarz - Christoffel の変換公式よりえられる無限級数を最初の2, 3項で打ち切って用いるため、孔形状が実際のものとは異なり、したがって両者とも実用性に欠ける憾みがある。そこで著者らは、隅を丸めた任意形孔を正確に単位円に写像する函数を決定し、これを用いて Muskhelishvili の複素変数法により本問題を解析し、算例として正三角形、正正方形、および正八角形の各孔を取上げて、熱流の傾きおよび孔の丸味が孔縁応力におよぼす影響について吟味検討した。

2. 写像函数 図-1に示すごとくZ面上の原点に中心を有する隅を丸めた任意形孔の外部領域をZ面上の単位円外に写像する函数は、二次元問題における Heller³⁾ らの写像法により次式のごとく求められる。
$$Z = \omega(S) = R \left(S + \sum_{n=1}^N a_n S^{-n} \right) \quad (1)$$

ここに $Z = x + iy$, $S = \rho e^{i\beta} = \xi + i\eta$, (x, y) : 直角座標, (α, β) : 直交曲線座標, R : 孔の大きさを決定する定数で正多角形孔のとき内接円半径となる, a_n : 一般に0でない複素数係数, N : 正整数

式(1)中の係数 a_n は実際の孔形状をなるべく正確に表わすごとく決定しなければならない。決定条件は、式(1)において $\rho=1$ とおくことによりえられる曲線が、任意の曲率半径を有する境界上の与えられた一連の点を通過することで、詳細は文献(3)にゆずる。

3. 応力函数 式(1)で定義される絶縁孔をもつ板が温度勾配 τ で X 軸と θ なる傾きを有する一様な定常熱流を受ける場合、板内の温度分布は次式で与えられる。

$$T = \tau R (\rho + \rho^{-1}) \cos(\beta - \theta) \quad (2)$$

いま、Z面内にある板を正方向の X 軸に沿ってカットし、式(2)の温度分布のもとに自由な変形を許せば、応力の存在しない状態が生じ、このとき点1と点2 (図-1参照) の相対変位、すなわち thermal dislocation は次式のごとくなる。⁴⁾

$$(u + iv)_2 - (u + iv)_1 = 2\pi i \cdot \alpha \tau R^2 (e^{i\theta} - a_1 e^{-i\theta}) \quad (3)$$

ここに u , v はそれぞれ、 θ 方向の変位成分で、 α は板材料の線膨張係数である。

しかるに点1と点2とは同一点であるゆえ変位の連続性が保持されねばならず、そのために応力と変位の等温状態が式(3)で与えられる dislocation の量と等大異符号のそれをもつようにすればよい。

さて二次元弾性理論において、変位は応力函数を $\phi_0(S)$, $\psi_0(S)$ として次式のごとく表わされる。

$$2G(u + iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \phi_0(S) - \frac{\omega(S)}{\omega'(S)} \overline{\phi_0(S)} - \psi_0(S) \quad (4)$$

ここに ν および G はそれぞれ板材料のポアソン比、せん断弾性係数で、フライム符号は S に関する微分を、バー記号は共役数をそれぞれ意味する。

式(4)において A を未知複素数定数として応力函数を次式のごとく与えれば⁴⁾

$$\phi_0(S) = A \log S, \quad \psi_0(S) = \bar{A} \log S \quad (5), (6)$$

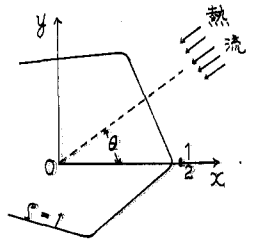


図-1

dislocationの量は次式となる。 $(u+iv)_2 - (u+iv)_1 = 8\pi\lambda \cdot A/E$ ここに E : 板材料のヤング率 (7)

したがって、式(3)の符号を変えたものと式(7)とを等置することにより、thermal dislocationは解消して変位は連続となる。このとき A は次式で与えられる。

$$A = -ExtR^2(e^{i\theta} - a_1 e^{-i\theta})/4 \quad (8)$$

式(5), (6)の応力函数を用うれば、thermal dislocationは解消する代わりに、板内に応力が生じ孔縁は自由境界でなくなる。すなわち、この応力函数による孔縁応力を打消す、すなわち孔縁を自由境界にすべき新たな応力函数 $\varphi(s), \psi(s)$ を決定せねばならない。このときこれらの新函数は dislocation のないものであるべきことは勿論である。

孔縁が自由境界である場合には次式が成立する。

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega(\sigma)}} \overline{\varphi(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \quad \text{ここに } \sigma = (s)_{s=1} = e^{i\beta} \quad (9)$$

しるはに新応力函数 $\varphi(s), \psi(s)$ は次式のごとく表わされる。

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s), \quad \psi(s) = \psi_0(s) + \psi_1(s) \quad (10), (11)$$

ここに $\varphi_0(s)$ および $\psi_0(s)$ は $\varphi_0(s), \psi_0(s)$ による孔縁応力を打消すべく付加される応力函数で、 $|s| > 1$ で解析的かつ dislocation のないものとして次式のごとくおきうる。

$$\varphi_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^{-k}, \quad \psi_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^{-k} \quad (12), (13)$$

式(9)の境界条件に式(10), (11)を代入し式(5), (6)を考慮すれば、次式がえられる。

$$\varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega(\sigma)}} [\sigma \overline{A} + \overline{\varphi_1(\sigma)}] + \overline{\psi_1(\sigma)} = 0 \quad (14)$$

式(14)の第2項の分数部分に式(1)の写像函数を代入し、これを σ の昇べき級数に展開すれば、次式をうる。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega(\sigma)}} = \sum_{g=0}^{\infty} e_g \sigma^{-N+g} \quad (15)$$

ここに係数 e_g は次式により算定されるものである。

$$a_{N-g} = e_g - \sum_{j=1}^{g-1} j \overline{a_j} e_{g-1-j} \quad (16)$$

したがって、式(14)は式(15)の關係を用いて次式となる。

$$\varphi_1(\sigma) + \left(\sum_{g=0}^{\infty} e_g \sigma^{-N+g} \right) [\sigma \overline{A} + \overline{\varphi_1(\sigma)}] + \overline{\psi_1(\sigma)} = 0 \quad (17)$$

式(17)の両辺に $d\sigma/2\pi\lambda(\sigma-s)$ (ただし $|s| > 1$) を乗じ式(12), (13)を考慮のうえ Cauchy の定理を用いて積分すれば、次式をうる。

$$-\varphi_1(s) - \overline{A} \sum_{g=0}^{N-2} e_g s^{-N+g+1} + \sum_{p=1}^{N-2} f_p s^{-p} = 0 \quad (18)$$

ここに係数 f_p は次式で与えられるものである。

$$f_p = \sum_{r=1}^{N-p-1} (N-p-r) e_{r-1} \overline{b_{N-p-r}} \quad (19)$$

したがって、式(18)より直ちに次式をうる。

$$\varphi_1(s) = \sum_{p=1}^{N-2} f_p s^{-p} - \overline{A} \sum_{g=0}^{N-2} e_g s^{-N+g+1} \quad (20)$$

式(12)と式(20)とにおいて s の同一べき級数を比較することにより、 $\varphi_1(s)$ の係数 b_k が次のごとくえられる。

$$b_k = \begin{cases} f_k - \overline{A} e_{N-k-1} & k=1, 2, 3, \dots, N-2 \\ -\overline{A} e_0 & k=N-1 \\ 0 & k \geq N \end{cases} \quad (21)$$

次に、もう一つの応力函数 $\psi_1(S)$ を決定するには、式(9)の境界条件の共役数を考えねばならない。
すなわち

$$\overline{\varphi'(0)} + \frac{\overline{\omega(0)}}{\omega'(0)} \varphi'(0) + \psi(0) = 0 \quad (22)$$

式(22)に式(10), (11)を代入し、式(5), (6)を考慮すれば、次式がえられる。

$$\overline{\varphi'(0)} + \frac{\overline{\omega(0)}}{\omega'(0)} [\bar{c}A + \varphi'(0)] + \psi(0) = 0 \quad (23)$$

$\varphi_1(S)$ の決定と同様に、式(23)の両辺に $d0/2\pi i (0-S)$ (R に対し $|S| > 1$) を乗じ Cauchy の定理を用いて積分すれば、次式をうる。

$$-\frac{\overline{\omega(S)}}{\omega'(S)} \frac{A}{S} + A \sum_{g=0}^{N-1} \bar{c}_g S^{N-g-1} - \frac{\overline{\omega(S)}}{\omega'(S)} \varphi_1'(S) - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p S^p - \psi_1(S) = 0 \quad (24)$$

これより直ちに

$$\psi_1(S) = A \sum_{g=0}^{N-1} \bar{c}_g S^{N-g-1} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p S^p - \left[\frac{A}{S} + \varphi_1'(S) \right] \frac{\overline{\omega(S)}}{\omega'(S)} \quad (25)$$

したがって、式(10), (11)に式(5), (6) および 式(12), (25)を代入することにより、所要の応力函数が次式のごとくえられる。

$$\varphi(S) = A \log S + \sum_{k=1}^{N-1} b_k S^{-k} \quad (26)$$

$$\psi(S) = \bar{A} \log S + A \sum_{g=0}^{N-1} \bar{c}_g S^{N-g-1} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p S^p - \left[\frac{A}{S} - \sum_{k=1}^{N-1} k b_k S^{-(k+1)} \right] \frac{\overline{\omega(S)}}{\omega'(S)} \quad (27)$$

4. 応力 以上より応力函数が決定されれば、応力はこれらを用いて次式より算定される。

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(S)}{\omega'(S)} \right] \quad (28)$$

$$\sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i \tau_{\alpha\beta} = \frac{2S^2}{\int^2 \omega'(S)} \left[\overline{\omega(S)} \left\{ \frac{\varphi'(S)}{\omega'(S)} \right\}' + \psi'(S) \right] \quad (29)$$

特に孔縁においては $\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$ であり、孔縁における接線方向応力として式(28)より次式をうる。

$$\sigma_\beta = (\sigma_\beta)_{\alpha=0} = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)} \right] \quad (30)$$

5. 実際の有孔板への適用 写像函数が次式で表わされる正多角形孔をもつ有孔板について応力函数と孔縁応力を求めてみる。

$$Z = R(S + a_{2m-1} S^{-m+1} + a_{2m-1} S^{-2m+1}) \quad (31)$$

式(16)において $N = 2m-1$ として c_g を求めれば、次値をうる。

$$c_0 = a_{2m-1}, \quad c_m = a_{m-1} \{1 + (m-1)a_{2m-1}\} \quad (32)$$

次に、式(19)より f_p は c_g, b_k の函数として次のごとく求められる。

$$f_{m-2} = m c_0 \bar{b}_m, \quad f_m = (m-2) c_0 \bar{b}_{m-2} \quad (33)$$

式(2), (33)を式(21)に適用することにより、 b_k は結局、次のごとく得る。

$$b_{m-2} = -\frac{c_m}{1 - m(m-2)c_0^2} \bar{A}, \quad b_m = -\frac{(m-2)c_0 c_m}{1 - m(m-2)c_0^2} A, \quad b_{2(m-1)} = -c_0 \bar{A} \quad (34)$$

したがって、式(26)に式(32), (34)を代入して $\varphi(S)$ をえられ、式(27)にこの決定された $\varphi(S)$ と式(31), (32), および(33)を代入することにより $\psi(S)$ が求められる。すなわち

$$\varphi(S) = A \log S - [\alpha_m \bar{A} S^{-m+2} + (m-2)a_{2m-1} \alpha_m A S^{-m} + a_{2m-1} \bar{A} S^{-2(m-1)}] \quad (35)$$

$$\psi(S) = \bar{A} \log S + A a_{2m-1} S^{2(m-1)} + (m-2)a_{2m-1} \alpha_m \bar{A} S^m + \alpha_m A S^{m-2} + [A S^{2(m-1)} + (m-2)\alpha_m \bar{A} S^m + m(m-2)a_{2m-1} \alpha_m A S^{m-2} + 2(m-1)a_{2m-1} \bar{A}] \frac{1 + a_{m-1} S^m + a_{2m-1} S^{2m}}{(2m-1)a_{2m-1} + (m-1)a_{m-1} S^m - S^{2m}} \quad (36)$$

$$\therefore \alpha_m = \frac{a_{m-1} \{1 + (m-1)a_{2m-1}\}}{1 - m(m-2)a_{2m-1}^2} \quad (37)$$

孔縁応力は、式(30)に式(31)の写像函数と式(35)の応力函数とを適用することにより、次式のように与えられる。

$$\sigma_t = -4SR \left\{ [1 - 2(m-1)(2m-1)\alpha_{2m-1}^2 - (m-1)(m-2)\alpha_{m-1}(1 + m\alpha_{2m-1})\alpha_m] \cos(\beta - \theta) + \{ -(m-1)\alpha_{m-1}(1 + 2(m-1)\alpha_{2m-1}) + (m-2)(1 - m(2m-1)\alpha_{2m-1}^2)\alpha_m \} \cos\{(m-1)\beta + \theta\} - (m-1)(m-2)\alpha_{2m-1}\alpha_m \cos\{(m+1)\beta - \theta\} - \alpha_{2m-1} \cos\{(2m-1)\beta + \theta\}] / [1 + (m-1)^2\alpha_{m-1}^2 + (2m-1)^2\alpha_{2m-1}^2 - 2(m-1)\alpha_{m-1}\{1 - (2m-1)\alpha_{2m-1}\} \cos m\beta - 2(2m-1)\alpha_{2m-1} \cos 2m\beta] \right\} \quad (38)$$

$$S = E \alpha t / 4$$

6. 算例 正三角形, 正方形, および

正八角形の各孔について, 熱流の傾きがそれぞれ $\theta = 0^\circ, 30^\circ; \theta = 0^\circ, 45^\circ; \theta = 0^\circ, 22.5^\circ$ のときの孔縁応力を式(38)より求め, その分布を図-2に示す。图中, r は孔の丸味を表わすもので隅角部の曲率半径と内接円直径との比で与えられる。

最大応力を隅半径比 r を変数として示せば, 図-3の如くである。

熱流が多角形の一边に直角に当たる場合には, いずれの孔でも熱流の当たる辺を挟む両頂角近傍において最大圧縮応力を生じ, 対頂角近傍において最大引張応力を生ずる。また熱流が多角形の頂角を通るときには, 四, 八角形孔の場合, 熱流の当たる頂角上(最高温)において最大圧縮応力を生じ, 対頂角上において最大引張応力を生ずる。

最大孔縁応力におよぼす丸味の影響に関しては, いずれの孔においても隅半径比 r が 0 に近づくにつれて $[\sigma_t]_{\max}$ は急激に上昇し, 四, 八角形孔では熱流が多角形の辺に直角に当たるときよりも頂角を通るときの方が丸味の影響は顕著であることが認められる。

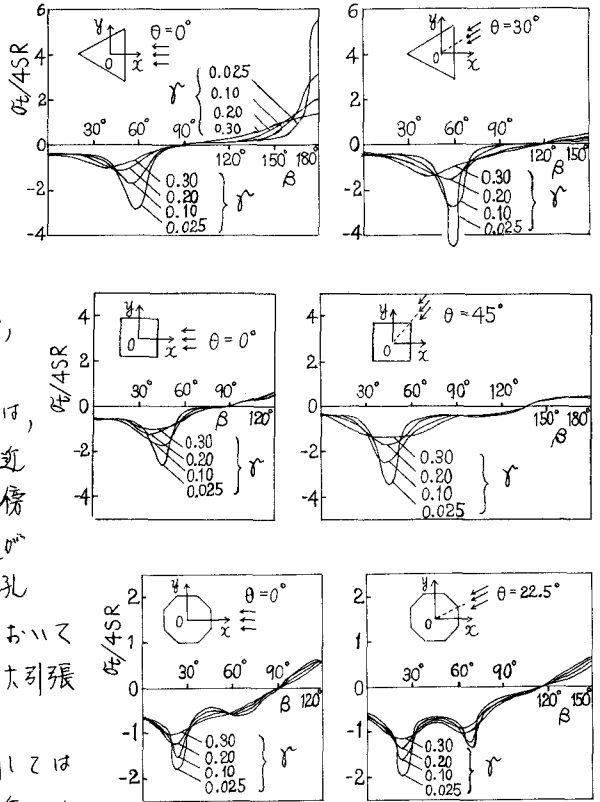


図-2 孔縁応力の分布

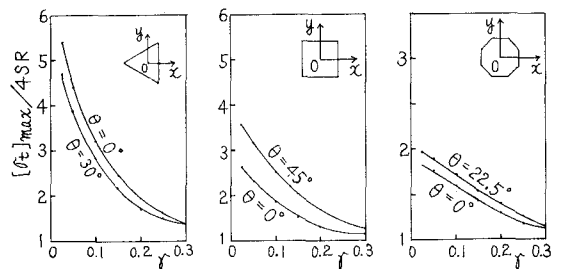


図-3 最大孔縁応力におよぼす丸味の影響

参考文献 1) H. Derewicz, Jour. Appl. Mech., 28-1, Mar. 1961.

2) 竹内・野田, 日本機械学会論文集, 34-259, 昭和43年3月

3) S.R. Heller, et al., Proc. 3rd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech., 1958.

4) A.L. Florence・J.N. Goodier, Jour. Appl. Mech., 27-4, Dec. 1960.