I-5

一般化された連続体の力学について

東北大学　正員　佐武正雄

§1　序論

こゝにいう'一般化された連続体'とは，次のようなものを示す。

(1)　通常の連続体では回転 ω は変位 u により生じ，

$$\omega = \frac{1}{2}\nabla \times u \qquad (1.1)$$

となるが，こゝでは各点において変位と独立な回転が可能であると考える。

(2)　変形の前後で必ずしも適合条件が満足されない。従って，分布転位等も変形の量に加える。

(3)　力の量としてモーメント M は通常，力 F から

$$M = r \times F \qquad (r\text{は位置ベクトル}) \qquad (1.2)$$

として生成されるが，これと独立なモーメント量の存在を応力，物体力についても考える。（偶応力 couple stress，物体偶力 body couple）

このような一般的な連続体については Cosserat 兄弟の研究（1909）[1] があるが，最近になって注目を集め多くの研究が発表されている[2]。本文では，このような連続体についての著者の研究を概説する。

§2．変位を示す諸量とその関係

こゝでは簡単のため，微小変形（実際は変形速度）の場合のみを取扱う。各点に変位 u，回転 ω が配置されているとし，近接した2点 A，A' の位置ベクトルを r, $r' = r + dr$ とする。2点の（みかけの）相対変位 du，相対回転 $d\omega$ は次式で定義する。

$$d\omega = \omega_{A'} - \omega_A \qquad (2.1)$$

$$du = u_{A'} - u_A = dr - d\mathring{r} \qquad (2.2)$$

こゝに，$d\mathring{r}$ は変形前の dr を示す。du の中には $d\omega$ による相対変位 $-dr \times \omega_A$ も含まれているから，これを除外した真の相対変位 du^* を次式で定義する。

$$(du)^* = du + dr \times \omega_A \qquad (2.3)$$

こゝに，右辺は全微分でないから，u^* というようなベクトル量は一般に存在しない。しかし (2.3) 式は変形して

$$(du)^* = d(u + r \times \omega) - r \times d\omega \qquad (2.4)$$

と記すことができる。従って，離れた2点 A，B の相対回転，相対変位を示す量として

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\omega}_A^B &= [\omega]_A^B \\ \tilde{u}_A^B &= [u]_A^B + [r \times \omega]_A^B\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

を導入する。$\tilde{u}_A^B$ は通常の相対変位と区別し，相対極変位と呼ぶことにする。$\tilde{\omega}_A^B$，$\tilde{u}_A^B$ はそれぞれ幾何学的意味をもった量である。[3), 4)]

（2.4）式などから

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\omega}_A^B &= \int_A^B d\omega &&= \int_A^B dr \cdot \bar{\alpha} \\ \tilde{u}_A^B &= \int_A^B (du)^* + \int_A^B r \times d\omega &&= \int_A^B dr \cdot \bar{\gamma} + \int_A^B r \times (dr \cdot \bar{\alpha})\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

とおくことができる。容易に

$$\left.\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \nabla \omega \\ \bar{\gamma} &= \nabla u + I \times \omega\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

が得られ　（I は単位テンソル）

$$\bar{\gamma}_s = \frac{1}{2}(\nabla u + u \nabla) \qquad (2.8)$$

$$I \cdot \times \bar{\gamma} = \nabla \times u - 2\omega \qquad (2.9)$$

である。$\bar{\gamma}_s$ は $\bar{\gamma}$ の対称部分で通常の歪となり，又，$I \cdot \times \bar{\gamma}$ は $\bar{\gamma}$ の交代部分を示すベクトルで，これが 0 （$\bar{\gamma}$ が対称）ならば，（1.1）式が成立し通常の連続体となる。又，（2.9）式より

$$tr\,\bar{\alpha} = \nabla \cdot \omega = 0 \qquad (2.10)$$

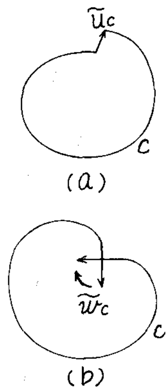
となる。

2点 A，B について，一般に $\tilde{\omega}_A^B$，$\tilde{u}_A^B \neq 0$ であるが ω，u と独立に次のような線分布量（テンソル）α，γ が存在すれば，次式を満足させることができる。

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\omega}_A^B &= \int_A^B dr \cdot \alpha + [\omega]_A^B &&= 0 \\ \tilde{u}_A^B &= \int_A^B dr \cdot \gamma + \int_A^B r \times (dr \cdot \alpha) + [u]_A^B + [r \times \omega]_A^B &&= 0\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

この場合 ω，u，α，γ は平衡しているという。（2.11）式は一般には 0 とならない。A と B とが一致し積分が一つの閉曲線 C となる場合，$\tilde{\omega}_c$，$\tilde{u}_c$ で示せば，ω，u の項は消去，α，γ の項だけが残る。図－1 はそれぞれ $\tilde{\omega}_c$，$\tilde{u}_c$ だけが単独に存在する場合を示し，$\tilde{u}_c$ はこの場合，転位論の Burgers ベクトルである。又，（b）のような格子欠陥は最近実際に見出され disclination（又は

rotation dislocation）と呼ばれているものである。[5] こういう場合，閉曲線だけ取出すと変形の前後で"喰違い"を生ずるが，囲まれる面分も考えそこに面分布量 J, K が存在すれば，次式を満足させることができ，その場合喰違いを生じないことになる。



図－1

$$\left.\begin{aligned} \tilde{w}_c &= \int dS\cdot J + \oint_c dr\cdot\alpha = 0 \\ \tilde{u}_c &= \int dS\cdot K + \int r\times(dS\cdot J) + \oint_c dr\cdot\gamma + \oint_c r\times(dr\cdot\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

J, K をそれぞれ *disclination* 密度，*dislocation* 密度という。J は不適合度とも呼ばれている。

(2.12)式は一般には 0 でなく面分が閉曲面 F となる場合，α, γ に関する項は消え，J, K の項のみとなる。変形の前後でその閉曲面が破れたりする場合でも，その内部の体分に分布量 X, Y が存在すれば，次式を満足させることができ，F と F の内部を含む全体については，亀裂を生じないようにすることができる。

$$\left.\begin{aligned} \tilde{w}_F &= \int dV X + \oint_F dS\cdot J = 0 \\ \tilde{u}_F &= \int dV Y + \int r\times(dV X) + \oint_F dS\cdot K + \oint_F r\times(dS\cdot J) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

X, Y をそれぞれ *disclination* 源，*dislocation* 源と呼ぶ。

(2.11), (2.12), (2.13) を積分変換公式を用いて書きかえれば

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \nabla w &= 0 \\ \gamma + \nabla u + I\times w &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} J + \nabla\times\alpha &= 0 \\ K + \nabla\times\gamma + I\times\times\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

$$\left.\begin{aligned} X + \nabla\cdot J &= 0 \\ Y + \nabla\cdot K + I\cdot\times J &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

等を得る。これらは平衡式及び適合条件として用いることができる。

§3 力の量と内部エネルギーの考察

§2において8個の変位に関する量を導入したが，これに対応して表－1に示すような8個の力の量を定義することができる。ここでは，その力学的意味の説明の詳細を省略する。変位に関する式(2.11)～(2.13)又は(2.14)～(2.16)において各量をその対応する力の量におき換えれば，力の量に関する式が得られるが，これらは力の平衡方程式として知られているものである。σ は応力を示す

テンソルであるが一般に対称ではない。μ は偶応力であり，χ は応力函数テンソルである。

表－1

	Deformation-quantities		correspondence by internal body-energy	Force-quantities	
	rotation	displacement		force	couple
point-quantity	w	u		f	m
line-quantity	α	γ		φ	χ
surface-quantity	J	K		σ	μ
body-quantity	X	Y		F	M

次に，変形量の変化に伴う内部エネルギーの変化について考察する。

平衡力系 σ，μ，F，M をうけている物体が変形の増分 Dw，Du に対してする仕事（内部エネルギー増分）を DW とすると

$$DW = \oint dS\cdot(\sigma\cdot Du + \mu\cdot Dw) + \int dV\,(F\cdot Du + M\cdot Dw)$$

$$= \int dV\,(\sigma\cdot\cdot\, D\bar{\gamma} + \mu\cdot\cdot\, D\bar{\alpha}) \qquad (3.1)$$

が得られる。従って，二つの歪量 $\bar{\gamma}$，$\bar{\alpha}$ の増加に抵抗するのが σ 及び μ であることが分かる。もし，通常の連続体であれば，(2.9)，(2.10)式により $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{S}$，$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{D}$（$\alpha_{D}$ は α の偏差部分を示す）であるから

$$DW = \int dV\,(\sigma_{S}\cdot\cdot\, D\bar{\gamma}_{(S)} + \mu_{D}\cdot\cdot\, D\bar{\alpha}_{(D)}) \qquad (3.2)$$

となる。次に，平衡力系 φ，χ，σ，μ をうけている物体が，変形の増分 $D\gamma$，$D\alpha$ に対して行う仕事 DW を考えれば，

$$DW = -\oint dS\cdot(\varphi\times\cdot D\gamma + \chi\times\cdot D\alpha)$$

$$= \int dV\,(\sigma\cdot\cdot\, D\gamma + \mu\cdot\cdot\, D\alpha + \varphi\cdot\cdot\, D\bar{K} + \chi\cdot\cdot\, D\bar{J}) \qquad (3.3)$$

となる。ここに，$\bar{J}$，$\bar{K}$ は

$$\bar{J} = \nabla\times\alpha, \qquad \bar{K} = \nabla\times\gamma + I\times\times\alpha \qquad (3.4)$$

で定義され，α，γ のもつ不適合度を示す。χ 及び φ はこれらの量の増加に抵抗する量であることが分かる。こういう関係を表－1において点線で示している。

参考分献

1) Cosserat, E. & F. : Théorie des Corps Déformable, Hermann (1909).
2) Kröner, E. (Editor) : Mechanics of Generalized Continua, Springer-Verlag (1967).
3) Satake, M. : Some Considerations on the Mechanics of Granular Materials, 2)の p.156-159 (1967)
4) Moriguchi, S. : Fundamental Theory of Dislocation of the Elastic Body, RAAG Research Notes 3rd Series No.65 (1963)
5) Anthony, K. et al. : Disclinations and the Cosserat-Continuum with Incomapatible Rotations, 2)の 335-358 (1967)