IV－206　　コンボリューションを導入した確率ＰＥＲＴシステムについて

京都大学工学部　正員　吉川 和広
京都大学大学院　学正員　○春名 攻

1．まえがき

土木工事はほとんどの場合、屋外において作業を遂行する。このため気象、海象その他種々の施工条件によってかなり影響されるので、一般には作業時間がかなり変動する。PERT/TIMEにおいては、これらの変動に対して、所要時間の平均値を各作業ごとに推定し、これを D_{ij} とおいてプロジェクトの評価を行なっている。しかし、一般には工期という重要な制約が与えられる場合が多く、プロジェクトの安全性あるいは妥当性を評価する場合には、これらの変動に基ずく結合点時刻、とくにプロジェクト遂行時間λの確率分布を知る必要がある。本研究においては従来の確率ＰERTに関する若干の考察を行なうとともに、コンボリューションを導入した確率PERTシステムについて述べることとする。

2、β分布を用いる確率ＰＥＲＴ ---- 従来の確率PERT ---- に関する考察

従来の確率PERTは作業時間の分布をβ分布として考えることによってプロジェクトの評価を行なう。すなわち、β分布

$$f(t)=\left\{(b_{ij}-a_{ij})^{\alpha+\gamma+1}B(\alpha+1,\gamma+1)\right\}^{-1}(t-a_{ij})(b_{ij}-t),\quad a_{ij}<t<b_{ij} \tag{1}$$

において、$\alpha=2\pm\sqrt{2}$ かつ $\gamma=2\mp\sqrt{2}$（符号同順）あるいは $\alpha=\gamma=3$ とおいた場合の期待値、分散でもって作業所要時間の期待値 $\overline{D_{ij}}$、分散 σ_{ij}^2 に近似させる。$\overline{D_{ij}}$ σ_{ij}^2 はそれぞれ次式で求められる。

$$\overline{D_{ij}}=(a_{ij}+4m_{ij}+b_{ij})/6,\quad \sigma_{ij}^2=\{(b_{ij}-a_{ij})/6\}^2,\ (b_{ij},a_{ij}\text{；上限，下限値，}m_{ij}\text{；中央値}) \tag{2}$$

上でもとめた $\overline{D_{ij}}$ を用いてＰＥＲＴ計算を行ない、１本のクリティカルパスを求めるとともに、中心極限定理によって、プロジェクト完了時間の分布形を正規分布として求めている。しかし、a_{ij}, b_{ij}, m_{ij} の統計量と推定値との関係に関する F.E. Grubbs の研究によれば、β分布近似に対する制約として、

(1) a_{ij}, b_{ij}, m_{ij} が統計的に独立であること、(2) $\sigma_{a_{ij}}\fallingdotseq\sigma_{b_{ij}}\fallingdotseq 10\,\sigma_{m_{ij}}\fallingdotseq 10\,\sigma_{D_{ij}}$ が成立すること。

が示されている。このようにβ分布近似にはかなりきびしい制約が果せられているが、さらに、ただ１本のクリティカルパスをとりだして完了時間の推定、分散の推定を行なうことに対して、つぎのことが明らかになってきている。すなわち、(i) 期待値については過小評価、(ii) 分散については過大評価となっていることが最近の研究をとおして示される。

3．コンボリューションによる確率ＰＥＲＴの数値計算法

以上のことより、従来の確率ＰＥＲＴによる評価はかなりの誤差を生じる可能性がある。従って、土木工事のように所要時間に、かなりの程度のバラツキを考慮しなければならないような場合には適用することは危険であるといわざるをえない。以下においては、プロジェクトの安全性や妥当性を正しく評価するために、分布形が一般的な場合に対して、コンボリューションを導入した数値計算法を示すことにする。なお、ここでは作業所要時間の分布を、日単位の離散変数に対して与えるものとする。

まず以下で用いる記号をつぎのように定義する。

$P(k)$；結合点 k を終点にもつ作業の集合．　$f_{ij}(y_{ij})$；作業 (ij) の所要時間が y_{ij} である確率．

$g_{ij}(t)$；作業 (ij) の最早完了時刻が t である確率．　$g_j(t)$；結合点 j の最早結合点時刻が t である確率．

$y_{ij}^{(1)}$; $f_{ij}(y_{ij})$ における y_{ij} の下限値.　　$y_{ij}^{(2)}$; $f_{ij}(y_{ij})$ における y_{ij} の上限値.

$t_{ij}^{(1)}$; $g_{ij}(t)$ における t の下限値.　　$t_{ij}^{(2)}$; $g_{ij}(t)$ における t の上限値.

このように定義すると図-1に示すような直列部，および，図-2に示すような並列部に対する数値計算システムはつぎのようにあらわされる。

図-1

(1) 直列部結合点 j の確率密度関数 $g_j(t)$ の計算

$$g_j(t)=\sum_{y_{ij}=y_{ij}^{(1)}}^{y_{ij}^{(2)}} g_i(t-y_{ij})\,f_{ij}(y_{ij})\cdot\Delta y_{ij}$$

において $\Delta y_{ij}=1$ とおくと,

$$g_j(t)=\sum_{y_{ij}=y_{ij}^{(1)}}^{y_{ij}^{(2)}} g_i(t-y_{ij})\,f_{ij}(y_{ij}) \tag{3}$$

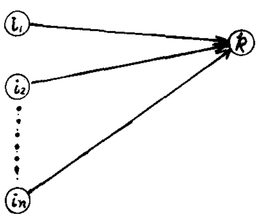

図-2

(2) 並列部結合点 k の確率密度関数 $g_k(t)$ の計算

ステップ1. $g_{ik}(t)$, $(ik)\in P(k)$ の計算を行なう。

$$g_{ik}(t)=\sum_{(ik)\in P(k)} g_i(t-y_{ij})\cdot f_{ij}(y_{ij}) \tag{4}$$

ステップ2. $g_{ik}(t)$ の累加確率関数 $G_{ik}(t)$ の計算を行なう。

$$G_{ik}(t)=\sum_{\tau=t_{ik}^{(1)}}^{t} g_{ik}(\tau)\cdot\Delta\tau$$

ここで, $\Delta\tau=1$ とおくと

$$\left.\begin{array}{l} G_{ik}(t)=\sum_{\tau=t_{ik}^{(1)}}^{t} g_{ik}(\tau)\,,\quad t_{ik}^{(1)}\leqq\tau\leqq t_{ik}^{(2)}, \\ G_{ik}(t_{ik}^{(2)})=1 \end{array}\right\} \tag{5}$$

ステップ3　結合点 k の最早完了時刻の累加確率関数 $G_k(t)$ の計算を行なう。

$$G_k(t)=\prod_{(ik)\in P(k)} G_{ik}(t) \tag{6}$$

ステップ4　結合点 k の最早完了時刻の確率密度関数 $g_k(t)$ の計算

$$g_k(t)=G_k(t)-G_k(t-1) \tag{7}$$

(1), (2) でのべた方法によって，結合点 k に対して順次 $g_k(t)$ をもとめていくことができるが，初期条件としては

$$g_0(t)=0 \tag{8}$$

を与えればよい。ここで注意しなければならないこととして，上限，下限値の決定の必要があり，この点で誤差の生じる可能性があるが，非常に小さい確率を与える確率変数に対してこれらを決定することができれば，実用上はほとんど問題がない。

4. 上で示した計算法は，電子計算機を用いることによりシステマチックに結合点時刻を計算することができ，報告者は，実際の土木工事の工程ネットワークに対しての適用計算を行ない，結果に対する考察の結果つぎのようなことが導びきだされた。すなわち，

(1) とびぬけて大きな平均値をもち，かつ小さな分散をもつようなパスが存在すれば分布形は，ほとんどそのパスの分布形に等しくなる。(2) 並列パスが多くなると，平均値，分散の大きなパスの影響が強くなり，期待値は大きくなり，分散は小さくなる。(3) 実用的な面からみれば，期待値の大きなパスのいくつかをとりだして計算すればかなり精度の高い結果が得られる。

なお，詳細は講演の際に示すこととする。