

京都大学工学部 正 員 佐佐木 綱

京都大学大学院 学生員 ○井 上 矩之

1. まえがき

交通密度が増加するにつれて、一般に走行速度は減少し、運転者の不満は増大する。この不満をエネルギーとして把握し、交通流にエネルギーの式を導入し、これに連続の式、運動の式を加えた三つの基礎方程式をつくり、流体力学的手法を用いて、交通流の解析を試みている。

一様な道路 ($u_b = \text{const.}$, $b = \text{const.}$) における基礎方程式は, $u = u(R)$, $\frac{du}{dR} < 0$ と仮定すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{連続の式} \\ \text{運動の式} \\ \text{エネルギーの式} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial t} + a(R) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ p = -R^2 u \frac{du}{dR} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{----- (1)} \\ \text{----- (2)} \\ \text{----- (3)} \end{array}$$

となる。これを解いて、速度 u と密度 R の関係を表す式を得ている。

$$u/u_b = f(R)/f(R_b), \quad \text{ただし, } f(R) = (1/R - 1/R_b)^{1/3} \quad \text{----- (4)}$$

ここに, u_b : 希望速度, b : 車線数, p : 圧力 [$\text{g km}^2/\text{lane sec}^2$], R_b : u_b に対応する密度, R_b : 飽和密度

ここでは, 交通流に生じる波動現象から、交通の流れの状態の分類を試みてみた。

2. 交通流における波動現象と音速

流体中のある場所に生じた微小な物理量の変化が、つぎつぎに周囲に伝わる現象が波であり、その伝わる速さが音速といわれるものである。交通流においても、走行中のある車が何らかの原因により加減速を行なうと、その影響が後続車につぎつぎと伝わり、いく現象がみられる。この現象は、波の現象に対応しているものと考えられよう。また、この微小な攪乱の伝播速度を、音速に対応させて考えることができよう。

流体力学によれば、音速 C は $C = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial R}}$ ²⁾, ここに, p : 圧力, R : 密度, で表わされている。交通流における圧力 p , 交通密度 R [$\text{台/km} \cdot \text{lane}$] と、この流体力学の p , R との対応から、交通流中の音速 C は次式で表わされるだろう。

$$C = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial R}} \quad \text{----- (5)}$$

ところで、一様な道路においては、(4)式と(3)式に代入して得られる結果をこの(5)式に代入することにより、音速 C が密度 R の関数として、

$$C = u_b / 3 f(R_b) \cdot R \{f(R)\}^2 \quad \text{----- (6)}$$

$$\text{あるいは, (4)式から速度 } u \text{ の関数として, } C = u/3 + \frac{R_b u_b^3}{3(R_b - R)} \cdot \frac{1}{u^2} \quad \text{----- (7)}$$

と表わせる。

実在の流体では、流れの速度が音速より速い流れ(超音速流)と遅い流れ(亜音速流)とでは、いろいろちがった性質をもっていることが知られている。流速と音速がちやうど等しくなるときの状態を臨界状態という。交通流においては、(7)式で $u = C$ とおいて解き、結果に*印をつけて表わすと、

$$u^* = C^* = \sqrt[3]{\frac{R_b}{2(R_b - R_b)}} \cdot u_b \quad \text{---- (8)}, \quad \text{のときが臨界状態になっていることがわかる。}$$

この u^* , C^* がそれぞれ臨界速度、臨界音速といわれるもので、交通流においても、最大交通量が生じている状態である。 u^* を境に流れ二つの状態に分けることができるなど重要な量となるだろう。

さて、 C^*/u_b と $R_b/R_b = x$, $u/u_b = y$, に対して、 $R_b/R_b = x_0$ をパラメータとして図-1, 図-2 に示す。

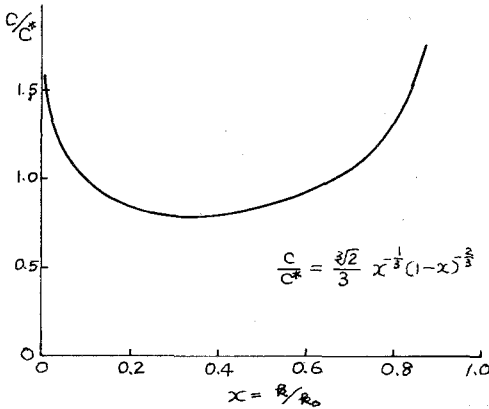


図-1 $c/c^* \sim x$

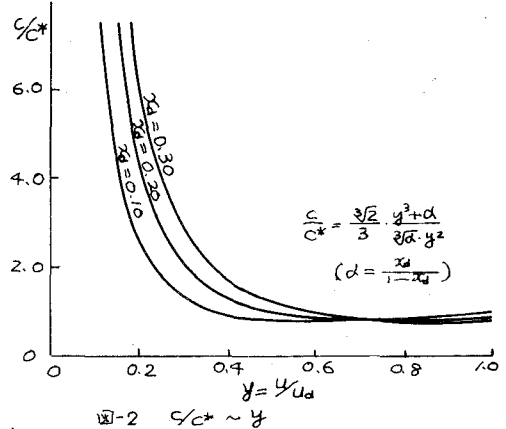


図-2 $c/c^* \sim y$

3. 流れの状態の分類とその特性

基礎方程式の解(4)式を、もとの方程式の(1)式に代入し、その結果に(7)式を用いることにより、次式が得られる。

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \text{----- (9)}$$

(9)式の各項の符号を吟味することにより、次のような交通流のもつ定性的な性質を知ることができる。

流れの分類	密度が場所的に増加している区間 ($\frac{\partial R}{\partial x} > 0$)	密度が場所的に減少している区間 ($\frac{\partial R}{\partial x} < 0$)
超音速流 $u > u^*$ ($R^* < R < R_0$)	【特定の場所の密度】このような条件を満たしている区間中の任意の場所の密度は、時間的に<u>減少</u>していく($\frac{\partial R}{\partial t} < 0$)。 【特定の車に着目】波はx軸の正方向にのみ伝播する。しかし、●印の車はその波よりも速く進むので、徐々に密度のより大きい状態中を走行するようになり、<u>減速</u>をよびなくされる。	【特定の場所の密度】このような条件を満たしている区間中の任意の場所の密度は、時間的に<u>増加</u>していく($\frac{\partial R}{\partial t} > 0$)。 【特定の車に着目】波はx軸の正方向にのみ伝播する。しかし、●印の車はその波よりも速く進むので、徐々に密度のより小さい状態中を走行するようになり、<u>加速</u>が可能となる。
亜音速流 $u < u^*$ ($R^* < R < R_0$)	【特定の場所の密度】このような条件を満たしている区間中の任意の場所の密度は、時間的に<u>増加</u>していく($\frac{\partial R}{\partial t} > 0$)。 【特定の車に着目】波はx軸の負方向にのみ伝播する。従って、●印の車は、前方からの高密度の位相の伝播とてあい、徐々に密度のより大きい状態中を走行するようになり、<u>減速</u>をよびなくされる。	【特定の場所の密度】このような条件を満たしている区間中の任意の場所の密度は、時間的に<u>減少</u>していく($\frac{\partial R}{\partial t} < 0$)。 【特定の車に着目】波はx軸の負方向にのみ伝播する。従って、●印の車は、前方からの低密度の位相の伝播とてあい、徐々に密度のより小さい状態中を走行するようになり、<u>加速</u>が可能となる。

表中 R^* は、 u^* に対応する密度で、臨界密度といわれるものである ($R^* = \frac{2}{3} R_0$)。

＜参考文献＞

- 1) 佐佐木綱, 井上矩之: 圧縮性流体としてみた交通流, 昭和43年度 関西支部年次講演会概要
- 2) Shih-I Pai: Introduction to the Theory of Compressible Flow