Ⅳ―165　　道路網の最大フローの存在範囲について

大阪市立大学工学部　正員　西村　昂

1. まえがき

道路網に一定のODパターンをもった交通（フロー）が流れる場合、どれだけの交通量が流れうるかという問題について考えてみたい。ここでは比較的容易に行えると思える2つのアルゴリズムを考えて、それらによって得られる最大フロー*が真の最大フローの上下限を与えるものであることを示してみたい。これら2つのアルゴリズムはカットを求めてその容量とフローの比の最小値を求めるものと、最短路配分法によって流れうる最大フロー*を求めるものである。(注. *印はアルゴリズムによって規定され、真の最大フローではない事を示す)

2. アルゴリズム1 ―― カット法 ――

与えられたネットワークを $G(N,A)$ とする。N はノードの集合を表わし、A はアークの集合を表わす。N を2つの部分集合 X, $\bar{X}$ に分割するカット $C(X,\bar{X})$ を考える。このカットで X から $\bar{X}$ 側に向う交通容量 $\mathbb{C}(X,\bar{X})$ とカットを横断するフロー $\mathbb{P}(X,\bar{X})$ はそれぞれ次式で表わされる。

$$\mathbb{C}(X,\bar{X})=\sum_{x\in X,\,y\in\bar{X}}\sum c_{xy}\ ,\quad \text{アーク}\,xy\in A \quad \cdots\cdots\ (1),\qquad \mathbb{P}(X,\bar{X})=\sum_{i\in X,\,j\in\bar{X}}\sum p_{ij}\quad \cdots\cdots\ (2)$$

たゞし c_{xy} はノード x からノード y にいたるアークの容量を表わし、p_{ij} はノード i からノード j にいたるフローを表わす。ここで p_{ij} は

$$\sum_i\sum_j p_{ij}=1\ ,\quad i,j\in N \quad \cdots\cdots\ (3)$$

となるよう標準化したものを用いる。このときそのカットにおいて横断できるフローの最大量は、(4)

$$T_k = T(X,\bar{X}) = \frac{\mathbb{C}(X,\bar{X})}{\mathbb{P}(X,\bar{X})} = \frac{\sum\sum c_{xy}}{\sum\sum p_{ij}} \quad \cdots\cdots\ (4)$$

で求められる値を越えることはできない。したがってすべての実行可能なカットの集合を $\mathbb{K}$ とすると、

$$T = \min_{C(X,\bar{X})\in K} \frac{\mathbb{C}(X,\bar{X})}{\mathbb{P}(X,\bar{X})} = \min_k T_k\ ,\quad k\in K \quad \cdots\cdots\ (5)$$

が求められ、これは $P=\{p_{ij}\}$ なるODパターンをもつフローの最大フローに対する上限を与える。

この証明は次のように行なわれよう。　ネットワークは(5)でえられたカット C によって X, $\bar{X}$ の2つの排他的な部分集合に分割される。このときODフローは次の3種に分類することができる。

$F(X,\bar{X})$：　集合 X から $\bar{X}$ にいたるフロー、　$F(X,X)$：集合 X 内のフロー、

$F(\bar{X},\bar{X})$：　集合 $\bar{X}$ 内のフロー、

$F(X,\bar{X})$ を流したあとの余裕容量によって $F(X,X)$、$F(\bar{X},\bar{X})$ の配分が同時に実行可能であれば、このODフローは全体として実行可能であり、T は真の最大フローとなる。もしこれより大きいフローが存在すると仮定すると(5)に矛盾する。$F(X,\bar{X})$、$F(\bar{X},X)$ の配分が同時に実行不可能であれば、$F(X,\bar{X})$、$F(\bar{X},X)$ が同時に実行可能となるためには、これらがカット C を通らなければならないので、C を通る $F(X,\bar{X})$ の大きさを小さくしなければならない。$F(X,\bar{X})$ が小さくなることはOD交通全体が小さくなることを意味するから最大フロー*は小さくなる。したがって上述の2つの場合しか起らないので、T は真の最大フローの上限を与える。

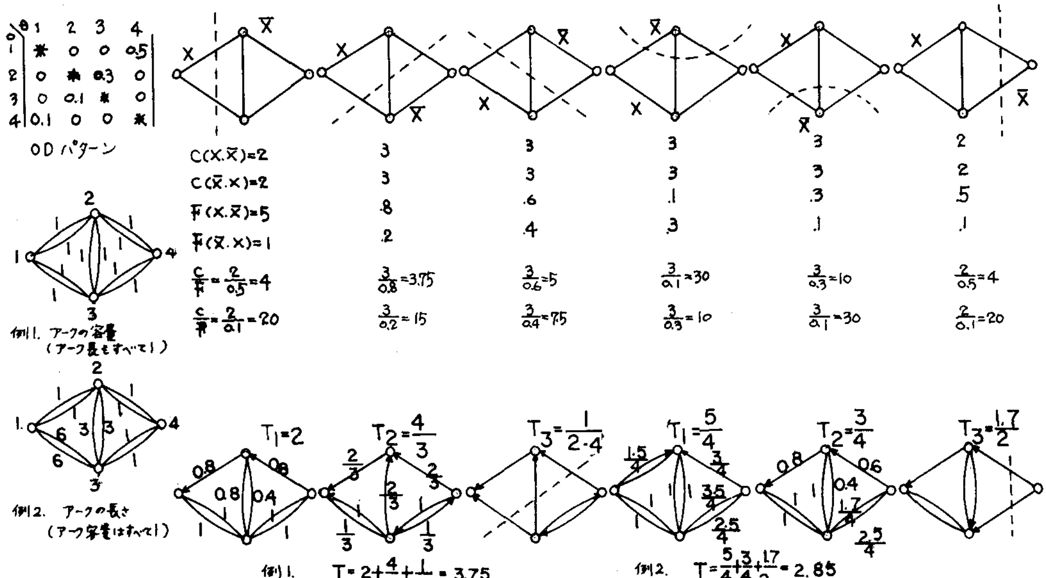
3. アルゴリズム2 ——最短路配分法——

すべてのOD交通量を最短路に配分し、最初に容量いっぱいに達したアークをネットワークからとり除き、他のアークも流れた交通に相当する容量を減らし、残ったネットワークに対して同じ計算をくり返すというステップをネットワークが切断されるまで続ける。このとき各ステップで流れたフローの合計は真の最大フローの下限を与える。この証明としては最短路配分法によって得たフローよりも大きいフローが流れる場合の例を示せばよい。これによって常に最短路配分法で得たフローに等しいかまたはそれ以上のフローが流れることになる。

文献1において最短路配分法によって真の最大フローが得られると述べたが、これに対して京都大学の佐佐木綱教授、同三好逸二氏より、もっと大きいフローが存在するという反例が示され、最大フローアルゴリズムとしては間違っていることが証明されたが、これによって最短路配分法によって得た結果が最大フローに対する下限を与えるものとしての位置づけができることとなった。

4. 計算例

ここで簡単な例を2つあげてみたい。1つは上下限が一致する例であり、もう1つは上下限が異なり、最大フローが最短路配分法による結果(下限)より大きい例である。



5. あとがき

最大フローの上下限としてはこれらが最も近い値を与えるものであるとは考えていないが、比較的容易に思いつくアルゴリズムによって得られるフロー値の位置づけをしたものである。

ここで京都大学佐佐木教授および同研究室の方々に有用なコメントをいただいたこと、また大阪市総合計画局の方々から御助力をいただいたことを記して感謝の意を表したい。

参考文献

1. 西村昂、中村正治,「道路網の最大フローに関する一考察」 昭和43年土木学会関西支部年次学術講演会講演概要.