IV－27　クリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブの解法

―― 一対辺が単純支持された場合 ――

九州大学工学部　正員　山崎徳也
〃　〃　正員　○彦坂 熙

1．緒言

鉄筋コンクリートおよびプレストレストコンクリート構造のクリープ挙動に関する既往の理論研究は、シャイベに対する二次元クリープ問題を一般的に論じた坂・六車両氏[1]のものを除いて、ほとんどすべてが単一部材（柱・はり）およびラーメン構造などの単軸クリープを対象としたものである。著者らは先に文献(2)において、任意横荷重を受ける鉄筋コンクリートスラブに対するクリープを考慮したたわみ曲面の方程式を誘導し、四辺単純支持の境界条件のもとで、弾性板理論におけるいわゆるNavier解と同形の解が容易にえられることを示したが、本研究はこれを一対辺単純支持、他対辺任意支持の境界条件を有するスラブに拡張応用し、かかるスラブのクリープによるたわみおよび応力分布の時間的変化の模様を理論的に明らかにせんとしたものである。

2．クリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブのたわみ曲面の方程式

任意直交軸 x および y に関する二次元応力状態におけるコンクリートの軸方向応力およびせん断応力を、時刻 t においてそれぞれ $\sigma_{cx}(t)$、$\sigma_{cy}(t)$ および $\tau_{cxy}(t)$ とする。 いま材令 τ_1 のコンクリートが時間的に変化するこれらの応力を受けるものとすれば、時刻 τ_1 から時刻 t までに生ずるコンクリートの軸方向ひずみ $\varepsilon_{cx}(t)$、$\varepsilon_{cy}(t)$ およびせん断ひずみ $\gamma_{cxy}(t)$ との間に、次のクリープを考慮した応力－ひずみ関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{cx}(t) &= \frac{\sigma_{cx}(t)-\nu\sigma_{cy}(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\{\sigma_{cx}(\tau)-\nu\sigma_{cy}(\tau)\}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E_c(\tau)}+C(t,\tau)\right\}d\tau \\
\varepsilon_{cy}(t) &= \frac{\sigma_{cy}(t)-\nu\sigma_{cx}(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\{\sigma_{cy}(\tau)-\nu\sigma_{cx}(\tau)\}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E_c(\tau)}+C(t,\tau)\right\}d\tau \\
\gamma_{cxy}(t) &= 2(1+\nu)\left[\frac{\tau_{cxy}(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\tau_{cxy}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E_c(\tau)}+C(t,\tau)\right\}d\tau\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここに　ν：コンクリートのポアソン比

$E_c(t)$：時刻 t におけるコンクリートの弾性係数

$C(t,\tau)$：クリープ函数

本研究において、クリープ函数はArutyunyan[3]の提案した次式を用いるものとする。

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],\qquad \varphi(\tau)=A_1/\tau+C_1 \quad (2)$$

式(1)を $\sigma_{cx}(t)$, $\sigma_{cy}(t)$、$\tau_{cxy}(t)$ について解けば次式がえられる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{cx}(t) &= \sigma_{cx}(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{t}e^{-\eta(\tau)}\left[\dot\sigma_{cx}(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{\tau}\frac{E_c(\tau)}{1-\nu^2}\left\{\ddot\varepsilon_{cx}(\tau)+\gamma\dot\varepsilon_{cx}(\tau)+\nu\left(\ddot\varepsilon_{cy}(\tau)+\gamma\dot\varepsilon_{cy}(\tau)\right)\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau \\
\sigma_{cy}(t) &= \sigma_{cy}(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{t}e^{-\eta(\tau)}\left[\dot\sigma_{cy}(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{\tau}\frac{E_c(\tau)}{1-\nu^2}\left\{\ddot\varepsilon_{cy}(\tau)+\gamma\dot\varepsilon_{cy}(\tau)+\nu\left(\ddot\varepsilon_{cx}(\tau)+\gamma\dot\varepsilon_{cx}(\tau)\right)\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau \\
\tau_{cxy}(t) &= \tau_{cxy}(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{t}e^{-\eta(\tau)}\left[\dot\tau_{cxy}(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{\tau}\frac{E_c(\tau)}{2(1+\nu)}\left\{\ddot\gamma_{cxy}(\tau)+\gamma\dot\gamma_{cxy}(\tau)\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ただし　$\eta(t)=\int_{\tau_1}^{t}\left[\gamma\{1+\varphi(\tau)E_c(\tau)\}-\dot E_c(\tau)/E_c(\tau)\right]d\tau$

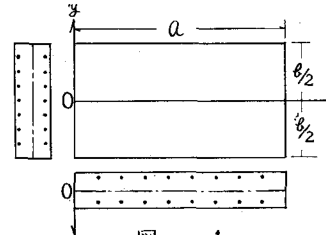
また鉄筋の x, y 方向の応力 $\sigma_{sx}(t)$, $\sigma_{sy}(t)$ およびせん断応力 $\tau_{sxy}(t)$ はそれぞれ次式で表わされる。

$$\sigma_{sx}(t)=E_s\varepsilon_{sx}(t),\qquad \sigma_{sy}(t)=E_s\varepsilon_{sy}(t),\qquad \tau_{sxy}(t)=\frac{E_s}{2(1+\nu_s)}\gamma_{sxy}(t). \quad (4)$$

ここに　E_s, ν_s：それぞれ鉄筋のヤング係数およびポアソン比

いま図－1のごとく矩形スラブの中立面内で相隣る二辺に平行に直交軸 x および y を、またこれら

に垂直下向きにz軸をとり、鉄筋はx, y軸方向に平行に配置されているものとする。　スラブのz方向のたわみを$w = w(t,x,y)$とし、平面保持の法則が成り立つものとすれば、任意点のひずみは次式で表わされる。



図－1

$$\varepsilon_x(t) = -z\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2},\quad \varepsilon_y(t) = -z\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2},\quad \gamma_{xy}(t) = -2z\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x\partial y} \qquad (5)$$

式(3), (4), (5) を用いれば、スラブの単位長当りの曲げモーメントおよび捩りモーメントM_x, M_yおよびM_{xy}, M_{yx}がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\left.\begin{aligned}
M_x =& -D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2}\right\} - D_{sx}\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - D_c(\tau_1)\left[\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^2} - \gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2}\right\}\right]\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau \\
& -\int_{\tau_1}^{t}\left[e^{-\eta(\tau)}\int_{\tau_1}^{\tau} D_c(\tau)\left\{\frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial y^2}+\gamma\left(\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2}\right)\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau, \\
M_y =& -D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2}\right\} - D_{sy}\frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} - D_c(\tau_1)\left[\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2} - \gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2}\right\}\right]\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau \\
& -\int_{\tau_1}^{t}\left[e^{-\eta(\tau)}\int_{\tau_1}^{\tau} D_c(\tau)\left\{\frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x^2}+\gamma\left(\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2}\right)\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau, \\
M_{xy} =& (1-\nu)D_c(\tau_1)\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x\partial y} + \frac{D_{sx}}{1+\nu_s}\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x\partial y} + (1-\nu)D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x\partial y} - \gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x\partial y}\right\}\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau \\
& +\int_{\tau_1}^{t}\left[e^{-\eta(\tau)}\int_{\tau_1}^{\tau}(1-\nu)D_c(\tau)\left\{\frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x\partial y}+\gamma\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x\partial y}\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau \\
M_{yx} =& -(1-\nu)D_c(\tau_1)\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x\partial y} - \frac{D_{sy}}{1+\nu_s}\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x\partial y} - (1-\nu)D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x\partial y} - \gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x\partial y}\right\}\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau \\
& -\int_{\tau_1}^{t}\left[e^{-\eta(\tau)}\int_{\tau_1}^{\tau}(1-\nu)D_c(\tau)\left\{\frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x\partial y}+\gamma\frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x\partial y}\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここに　$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$,　$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

$D_c(t)$　：コンクリート断面の単位巾当りの曲げ剛度.

D_{sx}, D_{sy}：それぞれxおよびy方向鉄筋の単位巾当りの曲げ剛度.

スラブに作用する荷重強度を$q(x,y)$とすれば、z方向の力の釣合条件式

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\partial y} = -q(x,y)$$

より、所要のクリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブのたわみ曲面の方程式が次式のごとく導かれる。

$$\begin{aligned}
& D_{sx}\frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + D_{sy}\frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx}+D_{sy}}{1+\nu_s}\frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2\partial y^2} + D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^2\partial y^2}\right\}\left[1-\gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau\right] \\
& + D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2\partial y^2}\right\}\int_{\tau_1}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau + \int_{\tau_1}^{t}\left[e^{-\eta(\tau)}\int_{\tau_1}^{\tau} D_c(\tau)\left\{\frac{\partial^4 \ddot{w}(\tau)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 \ddot{w}(\tau)}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 \ddot{w}(\tau)}{\partial x^2\partial y^2}+\gamma\left(\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2\partial y^2}\right)\right\}e^{\eta(\tau)}d\tau\right]d\tau \\
& = q(x,y)
\end{aligned} \qquad (7)$$

3. クリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブの解法

式(7) をtで1回微分した後両辺に$e^{\eta(t)}$を乗じ、再度両辺をtで微分して整理すれば次のwに関する微分方程式がえられる。

$$\beta_1(t)\frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial x^4} + \beta_2(t)\frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial y^4} + 2\beta_3(t)\frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial x^2\partial y^2} + \left\{\gamma D_c(t)+D_{sx}\dot{\eta}(t)\right\}\frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + \left\{\gamma D_c(t)+D_{sy}\dot{\eta}(t)\right\}\frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + \left\{2\gamma D_c(t)+\frac{D_{sx}+D_{sy}}{1+\nu_s}\dot{\eta}(t)\right\}\frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^2\partial y^2} = 0 \qquad (8)$$

ただし　$\beta_1(t) = D_{sx}+D_c(t)$,　$\beta_2(t) = D_{sy}+D_c(t)$,　$2\beta_3(t) = \frac{D_{sx}+D_{sy}}{1+\nu_s}+2D_c(t)$,　$\dot{\eta}(t) = \gamma\{1+\varphi(t)E_c(t)\} - \dot{E}_c(t)/E_c(t)$

また、$t=\tau_1$における$w(t)$の初期条件を与える微分方程式が次式のごとく導かれる。

$$\beta_1(\tau_1)\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^4} + \beta_2(\tau_1)\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial y^4} + 2\beta_3(\tau_1)\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^2\partial y^2} = q(x,y) \qquad (9)_a$$

$$\beta_1(\tau_1)\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4} + \beta_2(\tau_1)\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4} + 2\beta_3(\tau_1)\frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2\partial y^2} = \gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)D_c(\tau_1)\left\{\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^2\partial y^2}\right\} \qquad (9)_b$$

結局、式(7) の方程式を解くことは、式(9) により与えられる初期条件のもとで、式(8) の微分方程式を解くことと同じである。いま図－1のスラブが一対辺$x=0$および$x=a$で単純支持されるものとすれば、

$$w(t,x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)f_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x \qquad (10)$$

なる変数分離解はtの如何にかかわらず$x=0,\ a$における境界条件を満足する。　ここに、$T_m(t)$はtのみの函数、$f_m(y)$はyのみの函数である。

(i). $f_m(y)$の一般解.　$T_m(\tau_1)=1$を考慮すれば、任意に与えられた荷重に対する$f_m(y)$の一般解が式(9)aの微分方程式を解いて求められ、途中演算を省略して結果のみ示せば次のごとくである。

$$\left.\begin{array}{ll}\beta_3^2(\tau_1)-\beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1)>0\text{の場合：} & f_m(y)=f_{m0}(y)+\left(A_m\cosh k_1\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh k_1\frac{m\pi}{a}y+C_m\cosh k_2\frac{m\pi}{a}y+D_m\sinh k_2\frac{m\pi}{a}y\right)\\ \beta_3^2(\tau_1)-\beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1)=0\text{の場合：} & f_m(y)=f_{m0}(y)+\left(A_m\cosh k_3\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh k_3\frac{m\pi}{a}y+C_m k_3\frac{m\pi}{a}y\cosh k_3\frac{m\pi}{a}y+D_m k_3\frac{m\pi}{a}y\sinh k_3\frac{m\pi}{a}y\right)\\ \beta_3^2(\tau_1)-\beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1)<0\text{の場合：} & f_m(y)=f_{m0}(y)+\left(A_m\cosh k_4\frac{m\pi}{a}y\cos k_5\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh k_4\frac{m\pi}{a}y\cos k_5\frac{m\pi}{a}y+C_m\cosh k_4\frac{m\pi}{a}y\sin k_5\frac{m\pi}{a}y+D_m\sinh k_4\frac{m\pi}{a}y\sin k_5\frac{m\pi}{a}y\right)\end{array}\right\}\quad(11)$$

ただし　$f_{m0}(y)$は与えられた荷重より定まる特殊解，A_m, B_m, C_m, D_mは積分定数．

また、$k_1=\sqrt{(\beta_3+\sqrt{\beta_3^2-\beta_1\beta_2})/\beta_2}$，　$k_2=\sqrt{(\beta_3-\sqrt{\beta_3^2-\beta_1\beta_2})/\beta_2}$，　$k_3=\sqrt{\beta_3/\beta_2}$，

$k_4=\sqrt{(\beta_3+\sqrt{\beta_1\beta_2})/2\beta_2}$，　$k_5=\sqrt{(\sqrt{\beta_1\beta_2}-\beta_3)/2\beta_2}$．

(ii). $T_m(t)$の決定.　式(10)を式(8)に代入して整理すれば次式がえられる。

$$\frac{D_c(\tau_1)\left(\frac{d^4f_m}{dy^4}-2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{d^2f_m}{dy^2}+\frac{m^4\pi^4}{a^4}f_m\right)}{D_{sy}\frac{d^4f_m}{dy^4}-\frac{D_{sx}+D_{sy}}{1+\nu_s}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{d^2f_m}{dy^2}+D_{sx}\frac{m^4\pi^4}{a^4}f_m}=-\frac{\ddot{T}_m(t)+\dot{\gamma}(t)\dot{T}_m(t)}{\ddot{T}_m(t)+\gamma\dot{T}_m(t)}\frac{\dot{E}_c(t)}{E_c(t)}\qquad(12)$$

式(12)の左辺はyのみの函数、右辺はtのみの函数であるゆえ、両辺は定数でなければならない。

いま、
$$\lambda_m=\frac{D_{sy}\frac{d^4f_m}{dy^4}-\frac{D_{sx}+D_{sy}}{1+\nu_s}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{d^2f_m}{dy^2}+D_{sx}\frac{m^4\pi^4}{a^4}f_m}{\beta_2(\tau_1)\frac{d^4f_m}{dy^4}-2\beta_3(\tau_1)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{d^2f_m}{dy^2}+\beta_1(\tau_1)\frac{m^4\pi^4}{a^4}f_m},\qquad P_m(t)=\gamma+\frac{\lambda_m E_c(\tau_1)\{\gamma\varphi(t)E_c(t)-\dot{E}_c(t)/E_c(t)\}}{(1-\lambda_m)E_c(t)+\lambda_m E_c(\tau_1)}\qquad(13)$$

とおけば、式(12)より$T_m(t)$に関する次の2階常微分方程式がえられる。

$$\frac{d^2T_m(t)}{dt^2}+P_m(t)\frac{dT_m(t)}{dt}=0\qquad(14)$$

式(9)の初期条件を考慮して式(14)を解けば、$T_m(t)$が次式のごとく求められる。

$$T_m(t)=1+(1-\lambda_m)\gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t}e^{-\int_{\tau_1}^{\tau}P_m(\tau)d\tau}d\tau\qquad(15)$$

(iii). $w(t,x,y)$の決定.　式(10)、(11)、(15)より、クリープを考慮した一対辺単純支持鉄筋コンクリートスラブのたわみwの一般解は次式で与えられることとなる。

$$w(t,x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{1+(1-\lambda_m)\gamma\varphi(\tau_1)E_c(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t}e^{-\int_{\tau_1}^{\tau}P_m(\tau)d\tau}d\tau\right\}f_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x\qquad(16)$$

$f_m(y)$に含まれる4個の積分定数は、$y=\pm\frac{b}{2}$における任意の境界条件から定められる。

(iv). コンクリートおよび鉄筋の応力算定式.　式(16)を用いて式(5)の$\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$, $\gamma_{xy}(t)$をそれぞれ算定した後、これらを式(3)、(4)に代入すれば、コンクリートおよび鉄筋のクリープ応力がえられることとなるが、式中の定積分$-\int_{\tau_1}^{\tau}P_m(\tau)d\tau$は一般には解析的に求められないため、数値積分を行わねばならない。　なお、通常取り扱われるごとく$E_c(t)=\mathrm{const.}$と仮定すれば、$P_m(\tau)=\gamma\{1+\lambda_m E_c\varphi(\tau)\}$と簡単になり、所要のクリープ応力算定式が次のごとく求められる。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{cx}(t)=\frac{E_c}{1-\nu^2}z\sum_{m=1}^{\infty}\left\{1-\lambda_m\gamma E_c\varphi(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t}Q_m(\tau)d\tau\right\}\left\{\frac{m^2\pi^2}{a^2}f_m(y)-\nu\frac{d^2f_m}{dy^2}\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x,\\ \sigma_{cy}(t)=\frac{E_c}{1-\nu^2}z\sum_{m=1}^{\infty}\left\{1-\lambda_m\gamma E_c\varphi(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t}Q_m(\tau)d\tau\right\}\left\{\nu\frac{m^2\pi^2}{a^2}f_m(y)-\frac{d^2f_m}{dy^2}\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x,\\ \sigma_{sx}(t)=E_s z\sum_{m=1}^{\infty}\left\{1+(1-\lambda_m)\gamma E_c\varphi(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t}Q_m(\tau)d\tau\right\}\frac{m^2\pi^2}{a^2}f_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x,\\ \sigma_{sy}(t)=-E_s z\sum_{m=1}^{\infty}\left\{1+(1-\lambda_m)\gamma E_c\varphi(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t}Q_m(\tau)d\tau\right\}\frac{d^2f_m}{dy^2}\sin\frac{m\pi}{a}x.\end{array}\right\}\qquad(17)$$

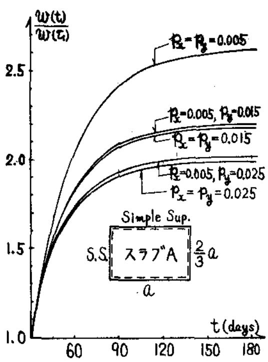
ただし　$Q_m(\tau)=e^{-\int_{\tau_1}^{\tau}P_m(\tau)d\tau}$

4. 計算例

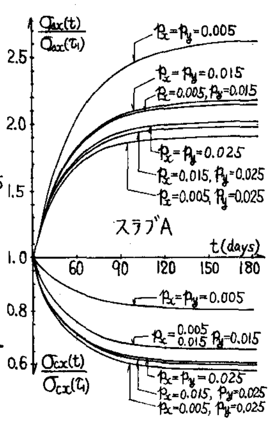
辺長比$b/a=2/3$の、スラブA（四辺単純支持）、スラブB（一対辺単純支持、他対辺自由）の二

種の単鉄筋矩形スラブに $\tau_1=28$日で等分布荷重を満載するものとし、x、y方向の鉄筋比p_x、p_yの種々の組合せに対してクリープたわみおよびクリープ応力の時間的変化を、式(16)、(17)を用いて算定した。材令によるコンクリートの弾性係数の変化は無視し、$E_c=2.1\times10^5\,kg/cm^2$, $\nu=0.15$, $E_s=2.1\times10^6\,kg/cm^2$, $\nu_s=0.3$、また式(2)のクリープ函数を決定する任意定数は、$\gamma=0.0304$、$A_1=2.94\times10^{-4}$、$C_1=0.508\times10^{-4}$とする。　満載等分布荷重$q(x,y)=q_0$に対する式(11)の特殊解は$f_{m0}(y)=\frac{4q_0a^4}{B_1(\tau_1)}\frac{1}{\pi^5m^5}$ $(m=1,3,5,\cdots)$ と求められる。

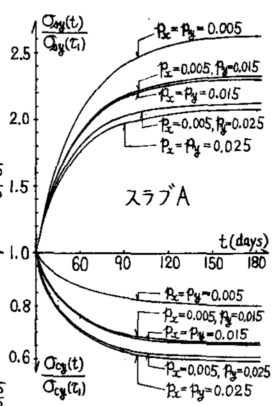
計算結果のうち、スラブの中央点($x=\frac{a}{2}$, $y=0$)におけるたわみ、鉄筋およびコンクリートの応力の時間経過にともなう変化の模様を、スラブAについては図-2～4、スラブBについては図-5、6にまとめて示した。　これらの結果より、本例で取り扱った鉄筋コンクリートスラブのクリープ挙動がはじめて明確となったほか、大略次のごとき特性が解明された。すなわち、(i) クリープたわみ$w(t)$については、スラブAではp_y、スラブBではp_xのおよぼす影響が極めて大きい。(ii) クリープ応力については、スラブAの$\sigma_{sy}(t)$、スラブBの$\sigma_{sx}(t)$、$\sigma_{sy}(t)$の増加率がそれぞれのスラブのたわみの増加率とほぼ等しい。(iii) スラブAの$\sigma_{sx}(t)$、$\sigma_{cx}(t)$はp_xおよびp_y双方の影響を受けるのに対し、スラブBではコンクリートおよび鉄筋のすべての応力がp_yの影響をほとんど受けない、など。



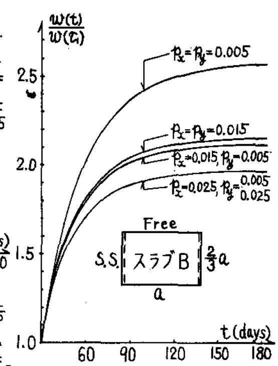
図－2



図－3



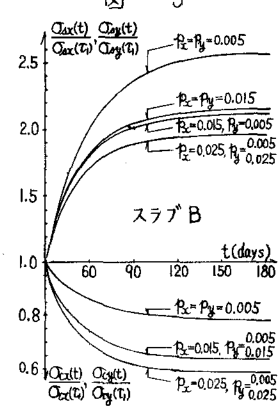
図－4



図－5

5. 結語

本研究は、従来の単軸曲げクリープ理論を二次元クリープ問題に拡張応用して鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解析に適用可能ならしめ、弾性板理論におけるLévy解と同形の式(10)の解を用いて、一対辺単純支持スラブのクリープ応力解析を行いうることを示したものである。式(7)は、鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解析の基本方程式として境界条件の如何を問わず成立するゆえ、本研究をさらに拡張して、任意の周辺支持条件をもつスラブおよび連続スラブのクリープ解析を行うことも可能となる。



図－6

〔参考文献〕

(1)　坂・六車：コンクリートの二次元クリープに関する理論的研究．日本建築学会論文報告集，第68号，昭和36年6月．

(2)　山崎・彦坂：鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解析．昭和42年度土木学会西部支部研究発表会論文集．昭和43年2月．

(3)　N. Kh. Arutyunyan : *Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures*. Pergamon Press. 1966.