

九州大学工学部 正員 山崎信也

" " 正員 考板 熙

" " 学生員 〇羽根悟朗

1. 緒言

コンクリートのクリープ、乾燥収縮および P C 鋼材のレラクセーションなどによる初期導入プレストレスの減少量を計算する既往の各種理論式では、計算の煩雑さやコンクリートの弾性係数の時間的变化が考慮されていない。本研究はコンクリートの打込み後、比較的早い時期にプレストレスの導入が行われる場合の P C 部材のクリープ挙動にコンクリートの弾性係数の時間的变化が及ぼす影響を理論的に明らかにすることを目的とし、加えて、時間経過とともに P C 部材の軸方向ひずみ、曲げ変形および応力の変化を算定する一般式を提示したものである。

2. クリープ関数

材令 t のコンクリートが単位の特続応力を受けるとき、時刻 t にあけるコンクリートの総ひずみ $\delta(t)$ は次式で表わされる。

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E_c(t)} + C(t, \tau)$$

ここに $E_c(t)$: 材令 t のコンクリートの弾性係数

$C(t, \tau)$: クリープ関数 (時刻 τ から時刻 t までに生じたクリープひずみ)

本研究では $C(t, \tau)$ の関数形として Arutyunyan¹⁾ の提案した次式を用いることとする。

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

$\varphi(\tau)$ として例えば $\varphi(\tau) = C_0 e^{-\gamma\tau}$

とかけば、式 (2) はいわゆる Whitney の仮定を満足する。また Arutyunyan は

$$\varphi(\tau) = A_1/\tau + C_1$$

を用いている。式 (2), (3), (4) の γ, C_0, A_1, C_1 は実験より定まる定数であり、一例として文献 (1) の実験値を基にして最小自乗法により求めた式 (2), (4) の結果を示せば図-1 のごとくである。

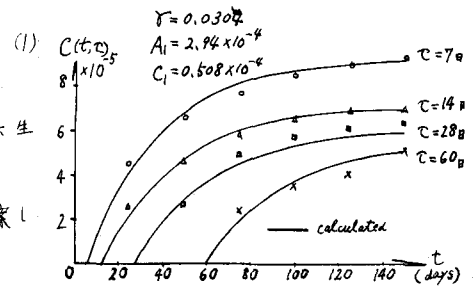


図-1

3. コンクリートの応力-ひずみ関係式

いま材令 τ_1 の P C 桁にプレストレスを導入し、さらに時刻 $t = \tau_2$ において特続荷重が載荷されるものとし、 $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ におけるコンクリートの応力とひずみを $\sigma_c(t)$, $\epsilon_c(t)$ 、また $\tau_2 \leq t$ におけるそれらを $\bar{\sigma}_c(t)$, $\bar{\epsilon}_c(t)$ とすれば、式 (1) を用いて次の関係式が成立する。

$$\tau_1 \leq t \leq \tau_2 : \quad \epsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau - S_h(t) \quad (5)$$

$$\tau_2 \leq t : \quad \begin{aligned} \bar{\epsilon}_c(t) &= \frac{\bar{\sigma}_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau + \left\{ \bar{\sigma}_c(\tau_2) - \sigma_c(\tau_2) \right\} \delta(t, \tau_2) + \int_{\tau_2}^t \left\{ \bar{\sigma}_c(\tau) - \sigma_c(\tau) \right\} \delta(t, \tau) d\tau - S_h(t) \\ &= \frac{\bar{\sigma}_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau - \int_{\tau_2}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau - S_h(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $S_n(t)$: 時刻 t における乾燥収縮ひずみ

本論文では $t_1 \leq t \leq t_2$ のみを取り扱いの対象とし、 $t_2 \leq t$ の期間については別途考慮することとする。

式(5)を(6)について解けば次式がえられる。

$$\sigma_c(t) = \sigma_c(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-\gamma(\tau)} \left[\dot{\sigma}_c(\tau) + E_c(\tau) \left\{ \dot{\epsilon}_c(\tau) + r \dot{\epsilon}_c(\tau) \right\} e^{\gamma(\tau)} \right] d\tau \quad (7)$$

$$\text{ただし } \gamma(\tau) = \int_{t_1}^{\tau} \left\{ r[1 + \varphi(\tau) E_c(\tau)] - \dot{\epsilon}_c(\tau)/E_c(\tau) \right\} d\tau$$

$$\sigma_c(t_1) = E_c(t_1) \epsilon_c(t_1), \quad \dot{\sigma}_c(t_1) = E_c(t_1) \dot{\epsilon}_c(t_1) - r \varphi(t_1) E_c(t_1) \sigma_c(t_1)$$

また $\cdot$ は $\frac{\partial}{\partial t}$, $\ddot{\cdot}$ は $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ を意味する。

4. 変形の微分方程式の誘導

図-2のごとく P C 桁の左端を原点にとり、断面の圆心軸にそって x 軸を、垂直下方に z 軸をそれぞれとる。P C 鋼材の断面積を A_s とし、軸方向圧縮力は、 x 軸の下方 z の位置に作用するものと仮定する。

P C 鋼材について、最初与えられた引張力により生ずるひずみを Δ 、時刻 t におけるひずみを $\epsilon_s(t)$ とし、かつ P C 鋼材とコンクリートが一体となり、変形するものとすれば、式(5)の $\epsilon_c(t)$ との間に次の関係が成立する。

$$\Delta + \epsilon_s(t) = \epsilon_s(t) \quad (8)$$

桁の z 方向のたわみを $w(t, x)$ とすれば、 $\epsilon_c(t)$ は軸方向ひずみ $\epsilon_{co}(t)$ と回転ひずみ $-x \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2}$ の和として求められる。すなわち、

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{co}(t) - x \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \quad (9)$$

従って時刻 t における P C 鋼材の引張力 $P(t)$ は式(8)と式(9)を用いて次式のごとく書き表わされる。

$$P(t) = E_s A_s \epsilon_s(t) = E_s A_s \left\{ \Delta + \epsilon_{co}(t) - f_o \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \right\} \quad (10)$$

断面の圆心軸に関するモーメントおよび軸方向力の釣合条件より次式が成立する。

$$-P(t) f_o = \int_{A_c} \sigma_c(t) z dA_c \quad (11)_a$$

$$-P(t) = \int_{A_c} \sigma_c(t) dA_c \quad (11)_b$$

ここで A_c : コンクリートの断面積

式(11)の左辺に式(10)、右辺に式(7)を代入し、かつ式(9)を考慮して整理すれば、次の $w(t, x)$, $\epsilon_{co}(t)$ に関する連立方程式がえられる。

$$-P(t) \frac{f_o}{E_c} \left\{ \Delta + \epsilon_{co}(t) - f_o \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \left\{ \frac{\partial^2 w(t_1, x)}{\partial x^2} - r \varphi(t_1) E_c(t_1) \frac{\partial^2 w(t_1, x)}{\partial x^2} \right\} \int_{t_1}^t e^{-\gamma(\tau)} \int_{t_1}^{\tau} \frac{n(\tau)}{n(t)} \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau, x)}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 w(\tau, x)}{\partial x^2} \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau d\tau \quad (12)_a$$

$$\begin{aligned} -P(t) \left\{ \Delta + \epsilon_{co}(t) - f_o \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \right\} &= S_n(t_1) + \epsilon_{co}(t_1) + \left[\dot{S}_n(t_1) + \dot{\epsilon}_{co}(t_1) - r \varphi(t_1) E_c(t_1) \left\{ \dot{S}_n(t_1) + \dot{\epsilon}_{co}(t_1) \right\} \right] \int_{t_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \\ &+ \int_{t_1}^t e^{-\gamma(\tau)} \int_{t_1}^{\tau} \frac{n(\tau)}{n(t)} \left\{ \left\{ \ddot{\epsilon}_{co}(\tau) + \dot{S}_n(\tau) \right\} + r \left\{ \dot{\epsilon}_{co}(\tau) + \dot{S}_n(\tau) \right\} \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau d\tau \end{aligned} \quad (12)_b$$

$$\text{ここに } \rho = A_0/A_c, \quad r_c = \sqrt{I_c/A_c}, \quad n(t) = E_c/E_c(t)$$

式(12)を直接解くことは不可能であるが、式(12)の両辺をそれぞれ一回微分したのち $e^{\int \varphi(t) dt}$ を乗じ、再度両辺をそれぞれ微分して整理すれば、結局次の式(13)の連立微分方程式が導かれ、与えられた式(14)の初期条件のもとで解くことができる。

$$\left\{ \frac{1}{\rho n(t) + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2} \right\} \frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} + \left\{ \frac{r}{\rho n(t)} + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \dot{\varphi}(t) \right\} \frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} = \frac{f_0}{r_c^2} \left\{ \ddot{E}_{c0}(t) + \dot{\varphi}(t) \dot{E}_{c0}(t) \right\} \quad (13)_a$$

$$f_0 \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} + \dot{\varphi}(t) \frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{\rho n(t)} \right\} \ddot{E}_{c0}(t) + \left\{ \frac{r}{\rho n(t)} + \dot{\varphi}(t) \right\} \dot{E}_{c0}(t) + \frac{1}{\rho n(t)} \left\{ \ddot{S}_n(t) + r \dot{S}_n(t) \right\} \quad (13)_b$$

初期条件 ($t = \tau_1$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1, x)}{\partial x^2} &= \frac{\rho n(\tau_1) \frac{f_0}{r_c^2} \{ \Delta - S_n(\tau_1) \}}{1 + \rho n(\tau_1) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\}} \\ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1, x)}{\partial x^2} &= \frac{\rho n(\tau_1) \frac{f_0}{r_c^2} \dot{\varphi}(\tau_1) E_c(\tau_1) \{ \Delta - S_n(\tau_1) \}}{\left[1 + \rho n(\tau_1) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\} \right]^2} - \frac{\rho n(\tau_1) \frac{f_0}{r_c^2} \dot{S}_n(\tau_1)}{1 + \rho n(\tau_1) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (14)_a$$

$$\left. \begin{aligned} E_{c0}(\tau_1) &= - \frac{\rho n(\tau_1) \left\{ \Delta + S_n(\tau_1) \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\} + S_n(\tau_1)}{1 + \rho n(\tau_1) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\}} \\ \dot{E}_{c0}(\tau_1) &= - \frac{\rho n(\tau_1) r \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \{ \Delta - S_n(\tau_1) \}}{\left[1 + \rho n(\tau_1) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\} \right]^2} - \frac{\left\{ 1 + \rho n(\tau_1) \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\} \dot{S}_n(\tau_1)}{1 + \rho n(\tau_1) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (14)_b$$

5. 微分方程式の解法

式(12a), (13a)および式(13)bから $\ddot{E}_{c0}(t)$ および $\dot{E}_{c0}(t)$ を消去し、かつ

$$\frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 \dot{w}(t, x)}{\partial x^2} = g(t, x) \quad (15)$$

の置換を行えば、次の $g(t, x)$ に関する微分方程式が与えられる。

$$\dot{g}(t, x) + A(t) g(t, x) = B(t) \quad (16)$$

ただし

$$A(t) = \frac{\dot{\rho}(t) + \rho n(t) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\} \dot{\rho}(t)}{\left\{ r \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\} \left\{ 1 + \rho n(t) \left[1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right] \right\}}$$

$$B(t) = \frac{\rho n(t) \frac{f_0}{r_c^2} \left\{ r \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\} m(t)}{1 + \rho n(t) \left\{ 1 + \left(\frac{f_0}{r_c}\right)^2 \right\}}$$

また

$$\dot{\rho}(t) = \dot{E}_c(t)/E_c(t) - 2 \left\{ \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\}^2 - r \dot{E}_c(t)/E_c(t) + r \left\{ r \varphi(t) - \dot{\varphi}(t) \right\} E_c(t)$$

$$\dot{\rho}(t) = \dot{E}_c(t)/E_c(t) - r \left\{ \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\} \left\{ 1 + 3 \varphi(t) E_c(t) \right\} + r^2 \varphi(t) \dot{E}_c(t)^2 + r E_c(t) \left\{ r \varphi(t) - \dot{\varphi}(t) \right\}$$

$$m(t) = - \frac{\left\{ \ddot{S}_n(t) + r \dot{S}_n(t) \right\} + \left\{ r \left[1 + \varphi(t) E_c(t) \right] - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\}}{r \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t)/E_c(t)} + \frac{\left\{ \ddot{S}_n(t) + r \dot{S}_n(t) \right\} \left\{ r \dot{\varphi}(t) E_c(t) + r \varphi(t) \dot{E}_c(t) - \dot{E}_c(t)/E_c(t) + \dot{E}_c(t)^2/E_c(t)^2 \right\}}{\left\{ r \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \right\}^2}$$

式(16)を解いて

$$g(t, x) = e^{-\int_{\tau_1}^t A(\tau) d\tau} \left\{ g(\tau_1, x) + \int_{\tau_1}^t B(\tau) e^{\int_{\tau_1}^{\tau} A(\tau) d\tau} d\tau \right\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{こゝに} \quad g(\tau, x) = & - \frac{\{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)\} p n(\tau) \frac{f_c}{f_c} + \varphi(\tau) E_c(\tau) \cdot p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\} \{1 - S_n(\tau)\}}{\left[1 + p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\}\right]^2} \\ & - \frac{\{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)\} p n(\tau) \frac{f_c}{f_c} \cdot \dot{S}_n(\tau) - \frac{p n(\tau) \frac{f_c}{f_c} \{\dot{S}_n(\tau) + r \ddot{S}_n(\tau)\}}{1 + p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\}} \end{aligned}$$

式(17)により $g(\tau, x)$ が求まるが式(15)を解いて $\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2}$ は次式で与えられることになる。

$$\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = \int_0^t e^{-r(\tau-t)} \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau, x)}{\partial x^2} + \int_0^\tau g(\tau, x) e^{r(\tau-\tau)} d\tau \right\} d\tau + \frac{\partial^2 w(0, x)}{\partial x^2} \quad (18)$$

式(18)を式(13)または式(13)に代入すれば $E_c(t)$ が容易に求まり、結果の表示は次式のごとくである。

$$E_c(t) = \int_0^t e^{-r(\tau-t)} \left\{ \dot{E}_c(\tau) + \int_0^\tau h(\tau) e^{r(\tau-\tau)} d\tau \right\} d\tau + E_c(0) \quad (19)$$

$$\text{ただし} \quad h(\tau) = e^{-\int_0^\tau A(\tau) d\tau} \left\{ h(\tau) + \int_0^\tau D(\tau) e^{\int_0^\tau A(\tau) d\tau} d\tau \right\}$$

$$h(\tau) = - \frac{\{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)\} p n(\tau) \frac{f_c}{f_c} \{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\} \{1 - S_n(\tau)\}}{\left[1 + p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\}\right]^2} - \frac{\{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)\} p n(\tau) \dot{S}_n(\tau)}{\left[1 + p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\}\right]^2} - \frac{\{1 + p n(\tau) \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\} \{\dot{S}_n(\tau) + r \ddot{S}_n(\tau)\}}{1 + p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\}}$$

$$D(\tau) = \frac{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)}{1 + p n(\tau) \left\{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\right\}} \cdot g(\tau)$$

$$\begin{aligned} g(\tau) = & - p n(\tau) \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2 \{\dot{S}_n(\tau) + r \ddot{S}_n(\tau)\} - \frac{\{r[1 + p n(\tau) \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2] + \frac{1}{f_c^2} \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)\} \{\dot{S}_n(\tau) + r \ddot{S}_n(\tau)\} + \{1 + p n(\tau) \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\} \{\dot{S}_n(\tau) + r \ddot{S}_n(\tau)\}}{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)} \\ & + \frac{\{1 + p n(\tau) \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2\} \{r\varphi(\tau)E_c(\tau) + r\varphi(\tau)\dot{E}_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau) + \dot{E}_c(\tau)^2/E_c(\tau)^2\}}{\{r\varphi(\tau)E_c(\tau) - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau)\}^2} \cdot \{\ddot{S}_n(\tau) + r \ddot{S}_n(\tau)\} \end{aligned}$$

式(18)を与えられた境界条件のもとで解けば、PC鋼材の軸方向圧縮力に起因するPC桁の任意点のたわみが時間 t ($\leq \tau$) の関数として与えられる。同様に式(19)は任意時刻におけるPC桁の軸方向ひずみを与えるものである。さらにこれら両式を式(7)および式(10)に代入して整理すれば、任意時刻におけるコンクリートの応力およびPC鋼材の引張力が次式で与えられる。

$$P(t) = P(0) + E_s A_s \left\{ \left[r\varphi(t)E_c(t) - f_0 \frac{\partial^2 w(0, x)}{\partial x^2} \right] \int_0^t e^{-r(\tau-t)} d\tau + \left\{ h(0) - f_0 g(0, x) \right\} \int_0^t e^{-r(\tau-t)} \int_0^\tau e^{-\int_0^\tau A(\tau) d\tau} d\tau d\tau \right\} \quad (20)$$

$$\sigma_c(t) = - \frac{P(t)}{I_c} \{ r_c^2 + f_0 z \} \quad (21)$$

式(18), (19), (20)および式(21)はコンクリートのクリープ、乾燥収縮、および弾性係数の時間的変化を考慮した厳密式である。ここで諸式は解析的に求めたが、定積分が含まれるので、実際演算に当たっては数値積分を行わねばならない。

6. 結語

本研究はPC桁のクリープ理論で通常無視されるコンクリートの弾性係数の時間的変化を厳密に考慮し、時間経過とともに軸方向ひずみ、曲げ変形および応力の変化を算定する一般式を提示したのである。なおここに誘導した式(21)の $\sigma_c(t)$ を式(4)に代入すれば、 $t \geq t_0$ 、すなわち荷重載荷後のPC桁のクリープ挙動を理論的に解析しうるようになる。

[参考文献]

(1) N. Kh. Arutyunyan: Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures, Pergamon Press, 1966